Corrigé du devoir surveillé n° 1

Version 3 – 2ème Bac Sc. Phys. – Barème sur 20

Exercice 1 — Limites et continuité – 6 points

1) Forme $\infty - \infty$ — 1 pt

Pour $x > 0$: $\sqrt{x^2+2x+1} - x = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+2x+1}+x} = \dfrac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-x\right) = \dfrac{2}{2} = 1$.

2) Limite trigonométrique — 1 pt

$\dfrac{1-\cos(6x)}{x^2} = 36 \times \dfrac{1-\cos(6x)}{(6x)^2}$ et $6x \to 0$:

Donc : la limite vaut $36 \times \dfrac{1}{2} = 18$.

3) Continuité en 0 — 1,5 pt

Pour $x > 0$: $g(x) = \dfrac{(x+9)-9}{x\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+9}+3}$,

donc $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \dfrac{1}{6}$. Et $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = g(0) = m$.

Donc : g est continue en $0 \iff m = \dfrac{1}{6}$.

> **Rappel : TVI**
>
> f continue et strictement monotone sur $[a;b]$ avec $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ a une unique solution dans $]a;b[$.

4) Existence et unicité de α — 1,5 pt

f est continue sur $[1;2]$ (polynôme) et $f'(x) = 3x^2+1 > 0$: f est strictement croissante.
$f(1) = -2 < 0$ et $f(2) = 6 > 0$.

Donc : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$.

5) Dichotomie — 1 pt

$f(1) < 0 < f(2)$.

➢ $f(1{,}5) \approx 0{,}875$, donc $\alpha \in]1;1{,}5[$.

➢ $f(1{,}25) \approx -0{,}797$, donc $\alpha \in]1{,}25;1{,}5[$.

Donc : $1{,}25 < \alpha < 1{,}5$.

Exercice 2 — Suite arithmético-géométrique – 8 points

1) Majoration — 1 pt

➢ $u_0 = 1 < 4$.

➢ Si $u_n < 4$, alors $\frac{1}{2}u_n < 2$, donc $u_{n+1} < 2+2 = 4$.

Donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 4$.

2) Monotonie — 1 pt

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 2 - u_n = 2 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(4-u_n) > 0$ (question 1).

Donc : (u_n) est strictement croissante.

3) Convergence — 1 pt

(u_n) est croissante et majorée par 4 :

Donc : elle est convergente.

4) Suite géométrique — 1,5 pt

$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 - 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - 4) = \frac{1}{2}v_n$.

Donc : (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 1 - 4 = -3$.

5) Termes généraux — 1 pt

$v_n = -3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n + 4 = 4 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

6) Limite — 1 pt

$0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.

> **Rappel : somme géométrique**
>
> Si $q \neq 1$: $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

7) Somme — 1,5 pt

$S_n = \sum_{k=0}^{n}(v_k + 4) = 4(n+1) + v_0\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$,

Donc : $S_n = 4(n+1) - 6\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Exercice 3 — Suite récurrente – 6 points

1) Encadrement — 1 pt

➢ $w_0 = 1 \in]0;4[$.

➢ Si $0 < w_n < 4$, alors $12 < 12 + w_n < 16$, donc $0 < \sqrt{12} < w_{n+1} < \sqrt{16} = 4$.

Donc : pour tout n, $0 < w_n < 4$.

2) Monotonie — 1,5 pt

$w_{n+1}^2 - w_n^2 = 12 + w_n - w_n^2 = -(w_n - 4)(w_n + 3) = (4 - w_n)(w_n + 3) > 0$. Comme $w_{n+1} > 0$ et $w_n > 0$:

$w_{n+1} - w_n = \dfrac{w_{n+1}^2 - w_n^2}{w_{n+1} + w_n} > 0$.

Donc : (w_n) est strictement croissante.

3) Convergence — 1 pt

(w_n) est croissante et majorée par 4 :

Donc : elle converge vers un réel $\ell \in [1;4]$.

Rappel : suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Si (u_n) converge vers ℓ, si f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$.

4) Limite

1,5 pt

$f(x) = \sqrt{12+x}$ est continue sur $[0\,;4]$; donc $\ell = \sqrt{12+\ell}$, d'où $\ell^2 - \ell - 12 = 0$, soit $(\ell-4)(\ell+3) = 0$. Comme $\ell \geq 1 > 0$:

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 4$.

5) Vitesse de convergence

1 pt

$$4 - w_{n+1} = 4 - \sqrt{12+w_n} = \frac{16-12-w_n}{4+\sqrt{12+w_n}} = \frac{4-w_n}{4+w_{n+1}} \leq \frac{4-w_n}{4} \text{ (car } w_{n+1} > 0 \text{ et } 4 - w_n > 0\text{).}$$

Par récurrence :

$$0 \leq 4 - w_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n (4 - w_0) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^n.$$