Lycée Ibn Batouta	Semestre 1 – Version 3	2ème Bac Sc. Phys.
Prof : Yassine NACHIT	**Devoir surveillé n° 1**	Option française (BIOF)
Année 2026 / 2027	Limites et continuité – Suites numériques	Durée : 2 h

La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction entreront dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 · Limites et continuité (6 points)

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+1}-x\right)$. (1 pt)

2) Calculer $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos(6x)}{x^2}$ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$). (1 pt)

3) Soit m un réel et g la fonction définie sur $[-9\,;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x}$ si $x>0$ et $g(x)=x^2+m$ si $-9\le x\le 0$. Déterminer m pour que g soit continue en 0. (1,5 pt)

4) Soit $f(x)=x^3+x-4$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $]1\,;2[$. (1,5 pt)

5) Par dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude 0,25. (1 pt)

Exercice 2 · Suite arithmético-géométrique (8 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+2$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n<4$. (1 pt)

2) Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante. (1 pt)

3) En déduire que (u_n) est convergente. (1 pt)

4) On pose $v_n=u_n-4$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1,5 pt)

5) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n. (1 pt)

6) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. (1 pt)

7) Calculer, en fonction de n, la somme $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$. (1,5 pt)

Exercice 3 · Suite récurrente et racine carrée (6 points)

On considère la suite (w_n) définie par $w_0=1$ et $w_{n+1}=\sqrt{12+w_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1) Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $0<w_n<4$. (1 pt)

2) Montrer que $w_{n+1}^2-w_n^2=(4-w_n)(w_n+3)$, puis que (w_n) est strictement croissante. (1,5 pt)

3) En déduire que (w_n) est convergente. (1 pt)

4) Déterminer la limite de (w_n). (1,5 pt)

5) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $4-w_{n+1}\le\dfrac{1}{4}(4-w_n)$, puis que $0\le 4-w_n\le 3\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$. (1 pt)