Corrigé du devoir surveillé n° 1

Version 1 – 2ème Bac Sc. Phys. – Barème sur 20

Exercice 1 — Limites et continuité – 6 points

1) Forme $\infty - \infty$ — 1 pt

Pour $x > 0$: $\sqrt{x^2+4x+1} - x = \dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+1}+x} = \dfrac{4+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right) = \dfrac{4}{2} = 2$.

2) Limite trigonométrique — 1 pt

$\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2} = 4\times\dfrac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}$ et $2x\to 0$:

Donc : la limite vaut $4\times\dfrac{1}{2} = 2$.

3) Continuité en 0 — 1,5 pt

Pour $x > 0$: $g(x) = \dfrac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$,

donc $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = \dfrac{1}{2}$. Et $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = g(0) = m$.

Donc : g est continue en $0 \iff m = \dfrac{1}{2}$.

> **Rappel : TVI**
> f continue et strictement monotone sur $[a;b]$ avec $f(a)f(b) < 0 \Rightarrow f(x) = 0$ a une unique solution dans $]a;b[$.

4) Existence et unicité de α — 1,5 pt

f est continue sur $[1;2]$ (polynôme) et $f'(x) = 3x^2+1 > 0$: f est strictement croissante.
$f(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 7 > 0$.

Donc : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$.

5) Dichotomie — 1 pt

$f(1) < 0 < f(2)$.

➢ $f(1{,}5) \approx 1{,}875$, donc $\alpha \in]1;1{,}5[$.

➢ $f(1{,}25) \approx 0{,}203$, donc $\alpha \in]1;1{,}25[$.

Donc : $1 < \alpha < 1{,}25$.

Exercice 2 — Suite arithmético-géométrique – 8 points

1) Majoration — 1 pt

➢ $u_0 = 2 < 6$.

➢ Si $u_n < 6$, alors $\frac{1}{2}u_n < 3$, donc $u_{n+1} < 3+3 = 6$.

Donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 6$.

2) Monotonie — 1 pt

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n + 3 - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(6-u_n) > 0$ (question 1).

Donc : (u_n) est strictement croissante.

3) Convergence — 1 pt

(u_n) est croissante et majorée par 6 :

Donc : elle est convergente.

4) Suite géométrique — 1,5 pt

$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n + 3 - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$.

Donc : (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = 2-6 = -4$.

5) Termes généraux — 1 pt

$v_n = -4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et $u_n = v_n + 6 = 6 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

6) Limite — 1 pt

$0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

> **Rappel : somme géométrique**
> Si $q \neq 1$: $v_0 + v_1 + \cdots + v_n = v_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

7) Somme — 1,5 pt

$S_n = \sum_{k=0}^{n}(v_k+6) = 6(n+1) + v_0\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$,

Donc : $S_n = 6(n+1) - 8\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$.

Exercice 3 — Suite récurrente – 6 points

1) Encadrement — 1 pt

➢ $w_0 = 1 \in]0;2[$.

➢ Si $0 < w_n < 2$, alors $2 < 2+w_n < 4$, donc $0 < \sqrt{2} < w_{n+1} < \sqrt{4} = 2$.

Donc : pour tout n, $0 < w_n < 2$.

2) Monotonie — 1,5 pt

$w_{n+1}^2 - w_n^2 = 2 + w_n - w_n^2 = -(w_n-2)(w_n+1) = (2-w_n)(w_n+1) > 0$. Comme $w_{n+1} > 0$ et $w_n > 0$:

$w_{n+1} - w_n = \dfrac{w_{n+1}^2 - w_n^2}{w_{n+1}+w_n} > 0$.

Donc : (w_n) est strictement croissante.

3) Convergence — 1 pt

(w_n) est croissante et majorée par 2 :

Donc : elle converge vers un réel $\ell \in [1;2]$.

Rappel : suite $u_{n+1} = f(u_n)$

Si (u_n) converge vers ℓ, si f est continue en ℓ, alors $\ell = f(\ell)$.

4) Limite

1,5 pt

$f(x) = \sqrt{2+x}$ est continue sur $[0\,;2]$; donc $\ell = \sqrt{2+\ell}$, d'où $\ell^2 - \ell - 2 = 0$, soit $(\ell-2)(\ell+1) = 0$. Comme $\ell \geq 1 > 0$:

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 2$.

5) Vitesse de convergence

1 pt

$$2 - w_{n+1} = 2 - \sqrt{2+w_n} = \frac{4-2-w_n}{2+\sqrt{2+w_n}} = \frac{2-w_n}{2+w_{n+1}} \leq \frac{2-w_n}{2} \text{ (car } w_{n+1} > 0 \text{ et } 2 - w_n > 0\text{).}$$

Par récurrence :

$$0 \leq 2 - w_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (2 - w_0) = 1\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$