| Lycée Ibn Batouta | Semestre 1 – Version 1 | 2ème Bac Sc. Phys. |
|---|---|---|
| Prof : Yassine NACHIT | **Devoir surveillé n° 1** | Option française (BIOF) |
| Année 2026 / 2027 | Limites et continuité – Suites numériques | Durée : 2 h |

*La clarté des raisonnements et la qualité de la rédaction entreront dans l'appréciation des copies.*

## Exercice 1 · Limites et continuité (6 points)

**1)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+4x+1}-x\right)$. (1 pt)

**2)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2}$ (on rappelle que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$). (1 pt)

**3)** Soit $m$ un réel et $g$ la fonction définie sur $[-1;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ si $x>0$ et $g(x)=x^2+m$ si $-1\le x\le 0$. Déterminer $m$ pour que $g$ soit continue en 0. (1,5 pt)

**4)** Soit $f(x)=x^3+x-3$. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha$ dans $]1;2[$. (1,5 pt)

**5)** Par dichotomie, donner un encadrement de $\alpha$ d'amplitude 0,25. (1 pt)

## Exercice 2 · Suite arithmético-géométrique (8 points)

On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0=2$ et $u_{n+1}=\frac{1}{2}u_n+3$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**1)** Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $u_n<6$. (1 pt)

**2)** Montrer que la suite $(u_n)$ est strictement croissante. (1 pt)

**3)** En déduire que $(u_n)$ est convergente. (1 pt)

**4)** On pose $v_n=u_n-6$. Montrer que $(v_n)$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme. (1,5 pt)

**5)** Exprimer $v_n$, puis $u_n$, en fonction de $n$. (1 pt)

**6)** Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$. (1 pt)

**7)** Calculer, en fonction de $n$, la somme $S_n=u_0+u_1+\cdots+u_n$. (1,5 pt)

## Exercice 3 · Suite récurrente et racine carrée (6 points)

On considère la suite $(w_n)$ définie par $w_0=1$ et $w_{n+1}=\sqrt{2+w_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

**1)** Montrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $0<w_n<2$. (1 pt)

**2)** Montrer que $w_{n+1}^2-w_n^2=(2-w_n)(w_n+1)$, puis que $(w_n)$ est strictement croissante. (1,5 pt)

**3)** En déduire que $(w_n)$ est convergente. (1 pt)

**4)** Déterminer la limite de $(w_n)$. (1,5 pt)

**5)** Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$ : $2-w_{n+1}\le\dfrac{1}{2}(2-w_n)$, puis que $0\le 2-w_n\le 1\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. (1 pt)