Corrigé du devoir maison n° 1

Version 1 – 2ème Bac Sc. Phys.

Exercice 1 — Calcul de limites

Rappel : formes indéterminées

En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est celle du quotient de ses termes de plus haut degré. Pour « $\infty - \infty$ » avec une racine, on multiplie par l'expression conjuguée.

1) Fonction rationnelle et conjuguée

➢ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3 - x + 1}{2x^3 + x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^3}{2x^3} = \frac{3}{2}$.

➢ Pour $x < 0$ assez petit :

$$\sqrt{x^2+2x} + x = \frac{x^2+2x-x^2}{\sqrt{x^2+2x}-x} = \frac{2x}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}}-x}.$$

Comme $|x| = -x$:

$$\sqrt{x^2+2x} + x = \frac{2x}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1\right)} = \frac{-2}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+1}.$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}+x\right) = \dfrac{-2}{2} = -1$.

2) Conjuguée et factorisation

➢ Pour $x > 0$:

$$\sqrt{x^2+4x} - x = \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4}{\sqrt{1+\frac{4}{x}}+1},$$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+4x}-x\right) = \dfrac{4}{2} = 2$.

➢ $x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$, donc pour $x \neq 2$: $\dfrac{x^2-7x+10}{x-2} = x - 5$ et

$\lim\limits_{x\to2} \dfrac{x^2-7x+10}{x-2} = 2 - 5 = -3$.

3) Limite trigonométrique

Pour $x \neq 0$: $\dfrac{1-\cos(2x)}{x^2} = 4 \times \dfrac{1-\cos(2x)}{(2x)^2}$.

Quand $x \to 0$, $X = 2x \to 0$ et $\dfrac{1-\cos X}{X^2} \to \dfrac{1}{2}$.

Donc : $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1-\cos(2x)}{x^2} = \dfrac{4}{2} = 2$.

4) Encadrement

Pour $x > 0$: $-1 \leq \cos x \leq 1$, donc $\dfrac{3x-1}{x+1} \leq \dfrac{3x+\cos x}{x+1} \leq \dfrac{3x+1}{x+1}$. Les deux fonctions qui encadrent tendent vers 3 en $+\infty$ (quotient des termes de plus haut degré).

Donc : par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x+\cos x}{x+1} = 3$.

Exercice 2 — Continuité – TVI

1) Continuité en 0

$\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0} 4 \times \dfrac{\sin(4x)}{4x} = 4 \times 1 = 4$ (car $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sin X}{X} = 1$). g est continue en 0 si et seulement si $\lim\limits_{x\to0} g(x) = g(0)$, c'est-à-dire $\alpha = 4$.

Rappel : théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue et strictement monotone sur $[a;b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet une **unique** solution dans $]a;b[$.

2) a) Monotonie

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 1$. Pour $x \in [1;2]$: $x^2 \geq 1$, donc $3x^2 \geq 3$ et $f'(x) \geq 4 > 0$.

Donc : f est strictement croissante sur $[1;2]$.

2) b) Existence et unicité

f est continue (polynôme) et strictement croissante sur $[1;2]$; $f(1) = -3 < 0$ et $f(2) = 5 > 0$.

Donc : d'après le TVI, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1;2[$.

2) c) Dichotomie

On a $f(1) < 0 < f(2)$.

➢ $f(1{,}5) \approx -0{,}125 < 0$, donc $\alpha \in]1{,}5;2[$.

➢ $f(1{,}75) \approx 2{,}109 > 0$, donc $\alpha \in]1{,}5;1{,}75[$.

Donc : $1{,}5 < \alpha < 1{,}75$ (amplitude 0,25).

2) d) Signe de f

f est strictement croissante sur $[1;2]$ et $f(\alpha) = 0$: $f(x) < 0$ sur $[1;\alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha;2]$.

Exercice 3 — Fonction réciproque

1) Forme canonique

Pour $x \geq 0$: $\left(\sqrt{x}-1\right)^2 - 1 = x - 2\sqrt{x} + 1 - 1 = x - 2\sqrt{x} = f(x)$.

2) Continuité et monotonie

$x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur I, donc f aussi. Si $1 \leq a < b$, alors $1 \leq \sqrt{a} < \sqrt{b}$, donc $0 \leq \sqrt{a} - 1 < \sqrt{b} - 1$ et, la fonction carré étant croissante sur $[0;+\infty[$, $\left(\sqrt{a}-1\right)^2 < \left(\sqrt{b}-1\right)^2$, d'où $f(a) < f(b)$.

Donc : f est strictement croissante sur I.

3) Limite et image

$f(x) = \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right)$ et $\sqrt{x} \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. f est continue et strictement croissante, donc $J = f(I) = [f(1)\,; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[= [-1\,;+\infty[$.

> **Rappel : fonction réciproque**
> Une fonction continue et strictement monotone sur I réalise une bijection de I sur $J = f(I)$; sa réciproque f^{-1} est continue sur J, de même sens de variation, et $(C_{f^{-1}})$ est symétrique de (C_f) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

4) Existence de f^{-1}

f est continue et strictement croissante sur I : elle admet une réciproque f^{-1} définie sur $J = [-1\,;+\infty[$, strictement croissante sur J.

5) Expression de f^{-1}

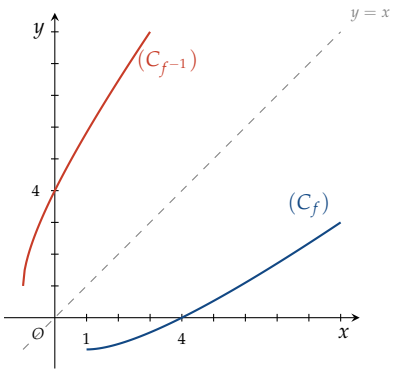
Soient $x \in J$ et $y \in I$: $f(y) = x \iff \left(\sqrt{y}-1\right)^2 = x+1 \iff \sqrt{y}-1 = \sqrt{x+1}$ (car $\sqrt{y}-1 \geq 0$) $\iff y = \left(1+\sqrt{x+1}\right)^2$.

Donc : $f^{-1}(x) = \left(1+\sqrt{x+1}\right)^2$ pour tout $x \in J$.

6) Équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0 \iff \sqrt{x}\left(\sqrt{x}-2\right) = 0 \iff \sqrt{x} = 2$ (car $\sqrt{x} \geq 1 > 0$) $\iff x = 4$. Vérification : $f^{-1}(0) = \left(1+\sqrt{1}\right)^2 = (2)^2 = 4$.

7) Courbes



Remarque : les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$; (C_f) part du point $(1\,;-1)$.

Exercice 4 — Racines n-ièmes

> **Rappel : racine n-ième**
> Pour $a \geq 0$, $\sqrt[n]{a}$ est l'unique réel positif b tel que $b^n = a$; $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$. L'équation $x^3 = a$ a pour unique solution $\sqrt[3]{a}$ si $a \geq 0$ et $-\sqrt[3]{-a}$ si $a < 0$; pour $a > 0$, $x^4 = a \iff x = \sqrt[4]{a}$ ou $x = -\sqrt[4]{a}$.

1) Simplification

$\sqrt[3]{16} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{64} = 4$ et $\sqrt[4]{16} = 2$, donc $A = \dfrac{4}{2} = 2$.

2) Équations

➢ $x^3 = 5 \iff x = \sqrt[3]{5}$.

➢ $x^4 = 81 \iff x = 3$ ou $x = -3$.

3) Comparaison

On élève à la puissance 6 (fonction strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$) : $\left(\sqrt[3]{3}\right)^6 = 3^2 = 9$ et $\left(\sqrt{2}\right)^6 = 2^3 = 8$.

Donc : $\sqrt[3]{3} > \sqrt{2}$.

4) a) Identité

$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3$ et $a^2+ab+b^2 > 0$.

4) b) Limite

Avec $a = \sqrt[3]{x^3+3x^2}$ et $b = x$ $(x > 0)$: $a^3 - b^3 = 3x^2$, donc

$$\sqrt[3]{x^3+3x^2} - x = \frac{3x^2}{a^2+ax+x^2} = \frac{3}{\left(\frac{a}{x}\right)^2 + \frac{a}{x} + 1}.$$

Or $\dfrac{a}{x} = \sqrt[3]{1+\dfrac{3}{x}} \to 1$,

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2} - x\right) = \dfrac{3}{3} = 1$.