# *Fiche technique*

| **Professeur : Yassine NACHIT** | **Matière : Mathématiques** |
|---|---|

## *Dérivation et étude des fonctions*

| | ***Durée : 20 heures*** | ***Niveau : 2 BAC PC*** |
|---|---|---|
| **Les capacités attendues** | • Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point et interpréter géométriquement.<br>• Calculer des dérivées (composée, réciproque, racine $n$-ième).<br>• Étudier les variations, la concavité et les branches infinies d'une fonction.<br>• Représenter graphiquement une fonction et exploiter sa courbe. | |
| **Contenus du programme** | • Dérivabilité en un point, à droite, à gauche ; tangente, demi-tangente.<br>• Dérivée de la composée, de la réciproque, de $\sqrt[n]{u}$ et $u^r$.<br>• Variations, extremums, concavité, points d'inflexion.<br>• Branches infinies, éléments de symétrie, étude complète. | |
| **Recommandations pédagogiques** | • On consolidera les acquis de la 1re année avant les compléments.<br>• Les propriétés liant le signe de $f'$ et $f''$ aux variations et à la concavité seront admises.<br>• On entraînera les élèves à l'étude complète de fonctions, comme à l'examen national. | |
| **Fichiers utilisés dans la préparation du cours** | • Les orientations pédagogiques.<br>• Livre de l'élève.<br>• Des sites Internet éducatifs.<br>• Distribution périodique du programme de mathématiques. | |
| **Rôle de l'enseignant** | • Écrire l'activité au tableau<br>• Marquer les difficultés<br>• Répartir les tâches<br>• Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle<br>• Diagnostiquer les prérequis des apprenants<br>• Noter les observations | |
| **Rôle de l'apprenant** | • Écrire les activités<br>• Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions.<br>• Formuler les résultats de l'activité sous forme de théorème ou de propriété.<br>• Répondre aux exercices | |

**Outils didactiques : Tableau, livre, craie, marqueurs …..**

# Dérivation et étude des fonctions

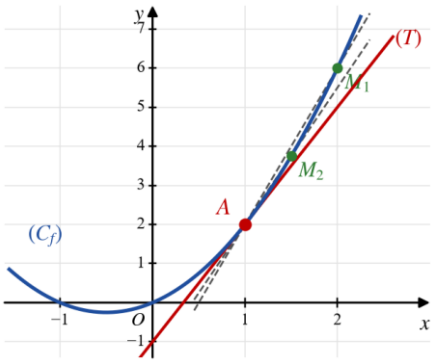
## I. Dérivabilité d'une fonction en un point

### 1. Nombre dérivé – tangente

#### Activité 1

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$ et $A(1;2)$ le point de sa courbe $(C_f)$ d'abscisse 1.

1) Pour $x \neq 1$, calculer le coefficient directeur $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ de la droite $(AM)$, où $M$ est le point de $(C_f)$ d'abscisse $x$.
2) Que devient ce coefficient lorsque $x$ tend vers 1 ?
3) Que devient la droite $(AM)$ lorsque le point $M$ se rapproche de $A$ ?




**Réponse.** $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2+x-2}{x-1} = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = x+2$, qui tend vers 3. Les sécantes $(AM_1)$, $(AM_2)$… « tournent » autour de $A$ et se rapprochent de la droite $(T)$ de coefficient directeur 3 : c'est la **tangente** à $(C_f)$ en $A$.

#### Définition

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle ouvert $I$ et $a$ un élément de $I$.

On dit que $f$ est **dérivable en** $a$ s'il existe un réel $\ell$ tel que :

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \ell \qquad \text{ou encore} \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$$

Le réel $\ell$ s'appelle le **nombre dérivé** de $f$ en $a$ ; on le note $f'(a)$.

#### Propriété (interprétation géométrique)

Si $f$ est dérivable en $a$, la courbe $(C_f)$ admet au point $A(a;f(a))$ une **tangente** $(T)$ de coefficient directeur $f'(a)$, d'équation :

$$(T) : y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

#### Exemples

**Exemple 1.** Dans l'activité, $f'(1) = 3$ et $f(1) = 2$ : la tangente à $(C_f)$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = 3(x-1)+2$, soit $y = 3x-1$.

**Exemple 2.** Soit $g(x) = \sqrt{x}$ et $a = 4$. Pour $x \geq 0$ et $x \neq 4$ :

$$\frac{g(x)-g(4)}{x-4} = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+2} \xrightarrow[x\to 4]{} \frac{1}{4}$$

Donc $g$ est dérivable en 4, $g'(4) = \frac{1}{4}$, et la tangente au point d'abscisse 4 a pour équation $y = \frac{1}{4}(x-4)+2$, soit $y = \frac{1}{4}x+1$.

***Remarque***

**Approximation affine :** si $f$ est dérivable en $a$, alors pour $h$ proche de 0 : $f(a+h) \approx f(a) + h\,f'(a)$. Par exemple, avec $g(x) = \sqrt{x}$, $a = 4$ et $h = 0{,}02$ : $\sqrt{4{,}02} \approx 2 + 0{,}02 \times \frac{1}{4} = 2{,}005$ (la calculatrice donne 2,00499 ...). Cette approximation est très utilisée en physique.

***Application 1***

**1)** En utilisant la définition, montrer que $f : x \mapsto 2x^3 - x$ est dérivable en $-1$ et calculer $f'(-1)$. Donner l'équation de la tangente à $(C_f)$ au point d'abscisse $-1$.

**2)** Même question pour $g : x \mapsto \frac{1}{x+2}$ au point d'abscisse 0.

***Solution***

- **1)** $f(-1) = -2 + 1 = -1$. Pour $x \neq -1$ : $f(x) - f(-1) = 2x^3 - x + 1 = (x+1)(2x^2 - 2x + 1)$, donc :

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = 2x^2 - 2x + 1 \underset{x \to -1}{\longrightarrow} 2 + 2 + 1 = 5$$

$f$ est dérivable en $-1$ et $f'(-1) = 5$. Tangente : $y = 5(x+1) - 1$, soit $y = 5x + 4$.

- **2)** $g(0) = \frac{1}{2}$. Pour $x \neq 0$ et $x > -2$ :

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x} = \frac{2 - (x+2)}{2x(x+2)} = \frac{-1}{2(x+2)} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{4}$$

$g$ est dérivable en 0 et $g'(0) = -\frac{1}{4}$. Tangente : $y = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$.

## 2. *Dérivabilité à droite – dérivabilité à gauche*

***Définition***

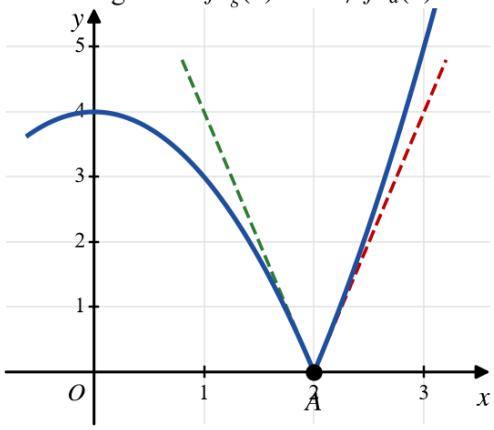
- $f$ est **dérivable à droite** en $a$ si $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell_1$ ($\ell_1$ réel) ; on note $\ell_1 = f'_d(a)$.
- $f$ est **dérivable à gauche** en $a$ si $\lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell_2$ ($\ell_2$ réel) ; on note $\ell_2 = f'_g(a)$.

***Propriété***

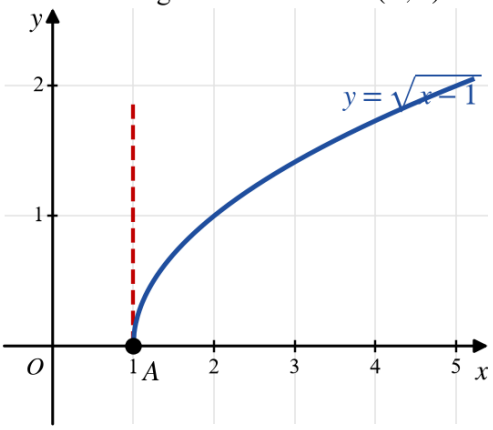
$f$ est dérivable en $a$ si et seulement si $f$ est dérivable à droite et à gauche en $a$ et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

| **Résultat du calcul** | **Interprétation géométrique au point $A(a; f(a))$** |
|---|---|
| $f'(a)$ existe | $(C_f)$ admet une tangente de coefficient directeur $f'(a)$ ; si $f'(a) = 0$, la tangente est horizontale. |
| $f'_d(a)$ (ou $f'_g(a)$) existe | $(C_f)$ admet une demi-tangente à droite (ou à gauche) de coefficient directeur $f'_d(a)$ (ou $f'_g(a)$). |
| $f'_d(a) \neq f'_g(a)$ | $A$ est un **point anguleux** : deux demi-tangentes de directions différentes. |
| $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$ | $f$ n'est pas dérivable à droite en $a$ ; $(C_f)$ admet en $A$ une **demi-tangente verticale**. |

Point anguleux : $f'_g(2) = -4 \neq f'_d(2) = 4$




Demi-tangente verticale en $A(1\,;0)$




## *Exemples*

**Exemple 1.** Soit $f(x) = |x^2 - 4|$ et $a = 2$ $(f(2) = 0)$. Au voisinage de 2 :

- pour $x > 2$ : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2 \underset{x\to 2^+}{\longrightarrow} 4$, donc $f'_d(2) = 4$ ;
- pour $x < 2$ (proche de 2) : $\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \frac{4-x^2}{x-2} = -(x + 2) \underset{x\to 2^-}{\longrightarrow} -4$, donc $f'_g(2) = -4$.

Comme $f'_d(2) \neq f'_g(2)$, $f$ n'est pas dérivable en 2 : $A(2;0)$ est un point anguleux, avec les demi-tangentes $y = 4(x - 2)$ $(x \geq 2)$ et $y = -4(x - 2)$ $(x \leq 2)$.

**Exemple 2.** Soit $g(x) = \sqrt{x-1}$ et $a = 1$. Pour $x > 1$ : $\frac{g(x)-g(1)}{x-1} = \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \frac{1}{\sqrt{x-1}} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} +\infty$. Donc $g$ n'est pas dérivable à droite en 1 : $(C_g)$ admet en $A(1;0)$ une demi-tangente verticale.

## *Application 2*

Soit $f$ la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x^2 + x$ si $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 3\sqrt{x} - 1$ si $x > 1$.

**1)** Montrer que $f$ est continue en 1.
**2)** Étudier la dérivabilité de $f$ à droite et à gauche en 1. $f$ est-elle dérivable en 1 ?
**3)** Donner une interprétation géométrique du résultat et les équations des demi-tangentes.
**4)** Étudier la dérivabilité de $f$ à droite en 0.

## *Solution*

- **1)** $f(1) = 2$ ; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1 + 1 = 2$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 3 - 1 = 2$ : $f$ est continue en 1.
- **2)** À gauche : $\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2+x-2}{x-1} = x + 2 \underset{x\to 1^-}{\longrightarrow} 3$, donc $f'_g(1) = 3$. À droite :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{3\sqrt{x} - 3}{x - 1} = \frac{3\left(\sqrt{x} - 1\right)}{\left(\sqrt{x} - 1\right)\left(\sqrt{x} + 1\right)} = \frac{3}{\sqrt{x} + 1} \underset{x\to 1^+}{\longrightarrow} \frac{3}{2}$$

donc $f'_d(1) = \frac{3}{2}$. Comme $f'_d(1) \neq f'_g(1)$, $f$ n'est pas dérivable en 1.

- **3)** Le point $A(1;2)$ est un point anguleux de $(C_f)$. Demi-tangente à gauche : $y = 3(x - 1) + 2$, soit $y = 3x - 1$ $(x \leq 1)$ ; demi-tangente à droite : $y = \frac{3}{2}(x - 1) + 2$, soit $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ $(x \geq 1)$.
- **4)** $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2+x}{x} = x + 1 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 1$ : $f$ est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

## 3. Dérivabilité et continuité

### Propriété

Si $f$ est dérivable en $a$, alors $f$ est continue en $a$.
La réciproque est fausse : la fonction $x \mapsto |x|$ est continue en 0, mais elle n'est pas dérivable en 0 (le point $O$ est un point anguleux).

# II. Fonction dérivée – opérations

## 1. Dérivées des fonctions usuelles et opérations

### Définition

$f$ est **dérivable sur un intervalle ouvert** $I$ si elle est dérivable en tout point de $I$. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ s'appelle la **fonction dérivée** de $f$. Si $f'$ est elle-même dérivable, sa dérivée se note $f''$ (dérivée seconde).

| Fonction $f$ | Dérivée $f'$ | Dérivable sur | Fonction | Dérivée |
|---|---|---|---|---|
| $k$ (constante) | $0$ | $\mathbb{R}$ | $u+v$ | $u'+v'$ |
| $x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ | $nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^*$ si $n<0$) | $k\,u$ | $k\,u'$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ | $]-\infty;0[$ et $]0;+\infty[$ | $u \times v$ | $u'v+uv'$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $]0;+\infty[$ | $\frac{1}{v}$ | $-\frac{v'}{v^2}$ |
| $\sin x$ | $\cos x$ | $\mathbb{R}$ | $\frac{u}{v}$ | $\frac{u'v-uv'}{v^2}$ |
| $\cos x$ | $-\sin x$ | $\mathbb{R}$ | $u^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$ | $n\,u'\,u^{n-1}$ |
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ | $\sqrt{u}$ $(u>0)$ | $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $\sin(ax+b)$ | $a\cos(ax+b)$ | $\mathbb{R}$ | $\cos(ax+b)$ | $-a\sin(ax+b)$ |

### Propriété

- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Si $u$ est dérivable et strictement positive sur $I$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur $I$.

### Exemples

- $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ : $f'(x)=\frac{2x(x-2)-(x^2+1)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x-1}{(x-2)^2}$.
- $g(x)=(3x^2-1)^4$ sur $\mathbb{R}$ : $g'(x)=4\times 6x(3x^2-1)^3=24x(3x^2-1)^3$.
- $h(x)=\sqrt{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$ (car $x^2+3>0$) : $h'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

## 2. Dérivée de la composée de deux fonctions

### Propriété

Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et $v$ une fonction dérivable sur un intervalle $J$ tel que $u(I) \subset J$. Alors $v \circ u$ est dérivable sur $I$ et, pour tout $x$ de $I$ :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$$

### Exemples

- $f(x) = \sin(x^2 + 1)$ : $f'(x) = 2x\cos(x^2 + 1)$.
- $g(x) = \cos^3 x = (\cos x)^3$ : $g'(x) = 3(-\sin x)\cos^2 x = -3\sin x \cos^2 x$.
- $h(x) = \tan(2x)$, pour $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ : $h'(x) = 2(1 + \tan^2(2x))$.

## 3. Dérivée de la fonction réciproque

### Propriété

Soit $f$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I$, $J = f(I)$, et $x_0 \in I$ avec $y_0 = f(x_0)$.

- Si $f$ est dérivable en $x_0$ et $f'(x_0) \neq 0$, alors $f^{-1}$ est dérivable en $y_0$ et :

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

- Si $f$ est dérivable sur $I$ et $f'$ ne s'annule pas sur $I$, alors $f^{-1}$ est dérivable sur $J$ et $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
- Si $f'(x_0) = 0$, la courbe de $f^{-1}$ admet une tangente verticale au point $(y_0; x_0)$.

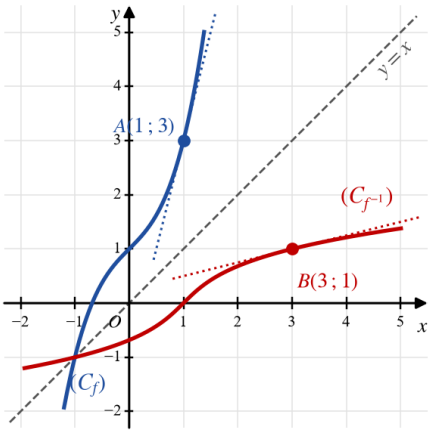
### Exemple

Soit $f(x) = x^3 + x + 1$. $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ : $f$ est strictement croissante. Comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $f$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(1) = 3$, donc $f^{-1}(3) = 1$, et $f'(1) = 4 \neq 0$. Ainsi $f^{-1}$ est dérivable en 3 et :

$$(f^{-1})'(3) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

Les tangentes en $A(1;3)$ et $B(3;1)$, de pentes 4 et $\frac{1}{4}$, sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.



## 4. Dérivée de la fonction racine $n$-ième et des puissances rationnelles

### Propriété

Soient $n \geq 2$ un entier, $r$ un nombre rationnel non nul et $u$ une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle $I$.

| Fonction | Dérivée | Valable pour |
|---|---|---|
| $\sqrt[n]{x}$ | $\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ | $x \in ]0;+\infty[$ |
| $\sqrt[n]{u(x)}$ | $\frac{u'(x)}{n\sqrt[n]{u(x)^{n-1}}}$ | $x \in I$ |
| $x^r$ | $r\,x^{r-1}$ | $x \in ]0;+\infty[$ |
| $u(x)^r$ | $r\,u'(x)\,u(x)^{r-1}$ | $x \in I$ |

### Remarque

La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ $(n \geq 2)$ n'est pas dérivable à droite en 0 : sa courbe admet en $O$ une demi-tangente verticale (comme $x \mapsto \sqrt{x}$).

### Exemples

- $f(x) = \sqrt[3]{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ : $f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}$.
- $g(x) = x\sqrt{x} = x^{\frac{3}{2}}$ sur $]0;+\infty[$ : $g'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$.
- $h(x) = \sqrt[4]{2x+5}$ pour $x > -\frac{5}{2}$ : $h'(x) = \frac{2}{4\sqrt[4]{(2x+5)^3}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{(2x+5)^3}}$.

### Application 3

Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué :

**1)** $f(x) = \frac{2x-1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ ;

**2)** $g(x) = x\sqrt{4-x}$ sur $]-\infty;4[$ ;

**3)** $h(x) = \sin^2(3x)$ sur $\mathbb{R}$ ;

**4)** $k(x) = \sqrt[3]{2x+1}$ sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

**5)** Soit $\varphi(x) = x^3 + 3x$. Montrer que $\varphi$ admet une fonction réciproque dérivable en 4 et calculer $(\varphi^{-1})'(4)$.

### Solution

- **1)** $f'(x) = \frac{2(x^2+1)-(2x-1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2}$.
- **2)** $g'(x) = \sqrt{4-x} + x \times \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} = \frac{2(4-x)-x}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8-3x}{2\sqrt{4-x}}$.
- **3)** $h'(x) = 2 \times 3\cos(3x) \times \sin(3x) = 6\sin(3x)\cos(3x) = 3\sin(6x)$.
- **4)** $k'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+1)^2}}$.
- **5)** $\varphi'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ : $\varphi$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ; elle admet donc une fonction réciproque. $\varphi(1) = 4$ et $\varphi'(1) = 6 \neq 0$, donc $\varphi^{-1}$ est dérivable en 4 et $(\varphi^{-1})'(4) = \frac{1}{\varphi'(1)} = \frac{1}{6}$.

# III. Dérivée et variations – extremums

## 1. Sens de variation

### Activité 2

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$. On a calculé, à l'aide d'un tableur, quelques valeurs de $f$ et de sa dérivée $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ :

| $x$ | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | 9 | 3,75 | 0 | $-2,25$ | $-3$ | $-2,25$ | 0 | 3,75 | 9 |
| $f(x)$ | $-2$ | 1,125 | 2 | 1,375 | 0 | $-1,375$ | $-2$ | $-1,125$ | 2 |

**1)** Sur quels intervalles $f'(x)$ semble-t-il positif ? négatif ?

**2)** Comment évoluent les valeurs de $f(x)$ sur ces intervalles ? Quel lien peut-on conjecturer ?

**Réponse.** $f'(x) \geq 0$ sur $[0;1]$ et sur $[3;4]$ : $f$ y augmente ; $f'(x) \leq 0$ sur $[1;3]$ : $f$ y diminue. Le signe de la dérivée donne le sens de variation ; aux points où $f'$ s'annule en changeant de signe, $f$ atteint un maximum ($f(1) = 2$) ou un minimum ($f(3) = -2$).

### Propriété (admise)

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

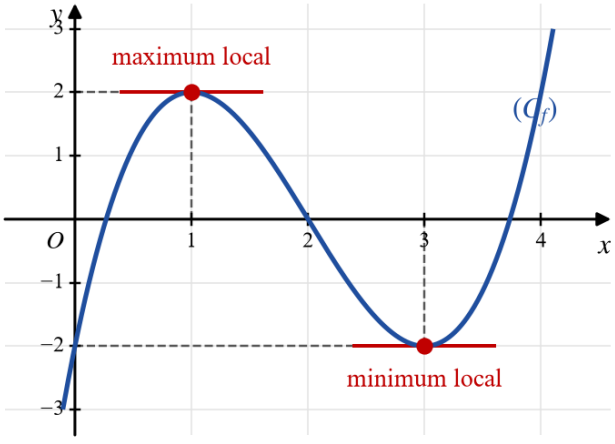
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x$ de $I$, alors $f$ est croissante sur $I$.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x$ de $I$, alors $f$ est décroissante sur $I$.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x$ de $I$, alors $f$ est constante sur $I$.
- Si $f'(x) > 0$ sur $I$, sauf en des points isolés où $f'$ s'annule, alors $f$ est **strictement** croissante sur $I$ (de même pour « strictement décroissante »).

## 2. Extremums

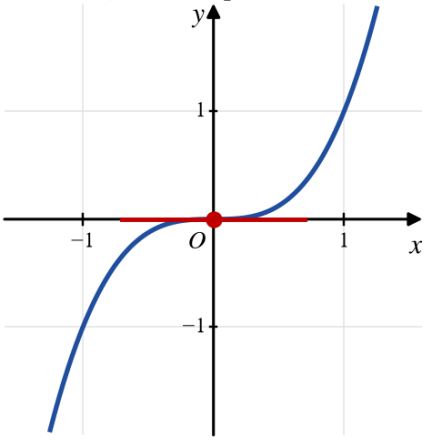
### Propriété

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $a$ un élément de $I$.

- Si $f$ admet un extremum (maximum ou minimum) local en $a$, alors $f'(a) = 0$.
- Si $f'$ s'annule en $a$ **en changeant de signe**, alors $f(a)$ est un extremum local de $f$ : un maximum si $f'$ passe de $+$ à $-$, un minimum si $f'$ passe de $-$ à $+$.




$y = x^3$ : $f'(0) = 0$, pas d'extremum



***Remarque***

La condition $f'(a)=0$ ne suffit pas : pour $f(x)=x^3$, $f'(0)=0$ mais $f'(x)=3x^2\geq 0$ ne change pas de signe ; $f$ est strictement croissante et n'a pas d'extremum en 0. Sa courbe admet en $O$ une tangente horizontale qui la traverse.

***Exemple***

Soit $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$. On a $f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)=3(x-1)(x-3)$, $f(1)=2$, $f(3)=-2$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $2$ | ↘ | $-2$ | ↗ | $+\infty$ |

$f$ admet un **maximum local** $f(1)=2$ et un **minimum local** $f(3)=-2$ ; en ces points, la courbe admet des tangentes horizontales (figure ci-dessus).

***Application 4***

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^4-2x^2$.

**1)** Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

**2)** Dresser le tableau de variations de $f$ et préciser ses extremums.

**3)** En déduire que, pour tout réel $x$ : $x^4-2x^2+1\geq 0$. Retrouver ce résultat par un calcul direct.

***Solution***

- **1)** $f'(x)=4x^3-4x=4x(x^2-1)=4x(x-1)(x+1)$. Signe (produit de trois facteurs) : $f'(x)<0$ sur $]-\infty;-1[\cup]0;1[$ et $f'(x)>0$ sur $]-1;0[\cup]1;+\infty[$.
- **2)** $f(-1)=f(1)=1-2=-1$, $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4=+\infty$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-1$ | ↗ | $+\infty$ |

$f$ admet un minimum $-1$ atteint en $-1$ et en 1, et un maximum local 0 atteint en 0.

- **3)** D'après le tableau, $-1$ est le minimum de $f$ sur $\mathbb{R}$ : pour tout $x$, $f(x)\geq -1$, c'est-à-dire $x^4-2x^2+1\geq 0$. Directement : $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2\geq 0$.

## IV. Concavité d'une courbe – points d'inflexion

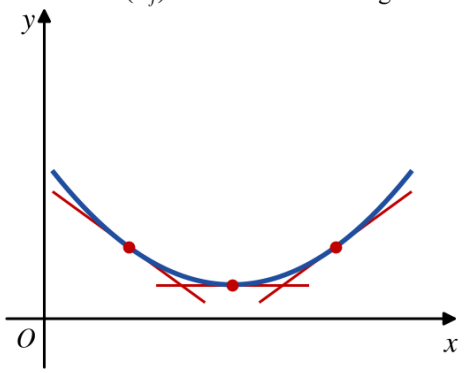
### 1. Concavité et dérivée seconde

***Définition***

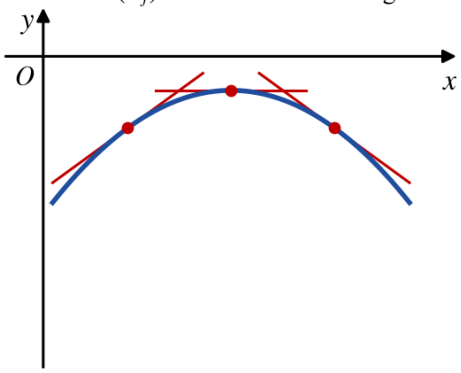
Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$.

- La courbe $(C_f)$ est **convexe** sur $I$ si elle est située **au-dessus** de chacune de ses tangentes sur $I$ (sa concavité est tournée vers les $y$ positifs).
- La courbe $(C_f)$ est **concave** sur $I$ si elle est située **au-dessous** de chacune de ses tangentes sur $I$ (sa concavité est tournée vers les $y$ négatifs).

convexe : $(C_f)$ au-dessus de ses tangentes




concave : $(C_f)$ au-dessous de ses tangentes




### Propriété (admise)

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle $I$.

- Si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x$ de $I$, alors $(C_f)$ est convexe sur $I$.
- Si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x$ de $I$, alors $(C_f)$ est concave sur $I$.

## 2. Point d'inflexion

### Propriété

Soit $f$ une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert $I$ et $a \in I$.

Si $f''$ s'annule en $a$ **en changeant de signe**, alors le point $A(a; f(a))$ est un **point d'inflexion** de $(C_f)$ : la courbe change de concavité en $A$ et traverse sa tangente en ce point.

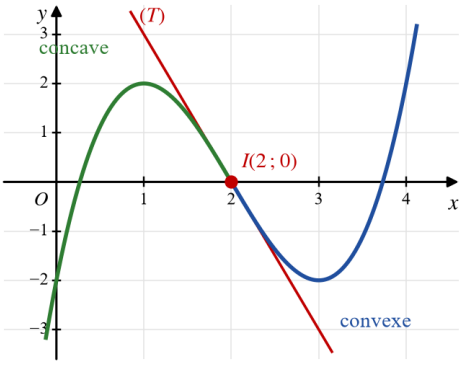
De même, si $f'$ s'annule en $a$ sans changer de signe, $A$ est un point d'inflexion (à tangente horizontale).

### Exemple

Reprenons $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$. On a $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$, donc :

$$f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$$

- $f''(x) \leq 0$ sur $]-\infty; 2]$ : $(C_f)$ est concave ;
- $f''(x) \geq 0$ sur $[2; +\infty[$ : $(C_f)$ est convexe ;
- $f''$ s'annule en 2 en changeant de signe et $f(2) = 0$ : $I(2; 0)$ est un point d'inflexion.




Tangente en $I$ : $f'(2) = -3$, donc $(T)$: $y = -3(x - 2)$, soit $y = -3x + 6$. La courbe traverse $(T)$ en $I$.

### Application 5

Soit $g(x) = x^4 - 6x^2 + 1$.

**1)** Calculer $g''(x)$ et étudier son signe.

**2)** Étudier la concavité de $(C_g)$ et déterminer ses points d'inflexion.

**3)** Donner l'équation de la tangente à $(C_g)$ au point d'inflexion d'abscisse positive.

### Solution

➢ **1)** $g'(x) = 4x^3 - 12x$ et $g''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1)$ : $g''(x) \geq 0$ sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ et $g''(x) \leq 0$ sur $[-1; 1]$.

- **2)** $(C_g)$ est convexe sur $]-\infty;-1]$ et sur $[1;+\infty[$, concave sur $[-1;1]$. $g''$ s'annule en changeant de signe en $-1$ et en $1$, et $g(-1)=g(1)=1-6+1=-4$ : les points $A(-1;-4)$ et $B(1;-4)$ sont des points d'inflexion.
- **3)** $g'(1)=4-12=-8$ : la tangente en $B$ a pour équation $y=-8(x-1)-4$, soit $y=-8x+4$.

# V. Branches infinies d'une courbe

## 1. Asymptotes verticales et horizontales

### Propriété

- Si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$, la droite d'équation $x=a$ est une **asymptote verticale** à $(C_f)$.
- Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$) avec $b$ réel, la droite d'équation $y=b$ est une **asymptote horizontale** à $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$ (ou $-\infty$).

## 2. Asymptote oblique

### Activité 3

Soit $f(x)=\frac{x^2+3}{x-1}$ pour $x\neq 1$, et $(D)$ la droite d'équation $y=x+1$.

**1)** Vérifier que $f(x)-(x+1)=\frac{4}{x-1}$.

**2)** Compléter : pour $x=11$, $f(x)-(x+1)=\cdots$ ; pour $x=101$, ... ; pour $x=1001$, ...

**3)** Que devient la distance verticale entre la courbe et la droite $(D)$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$ ?

**Réponse.** $f(x)-(x+1)=\frac{x^2+3-(x^2-1)}{x-1}=\frac{4}{x-1}$ : on obtient 0,4, puis 0,04, puis 0,004. Cet écart tend vers 0 : la courbe se rapproche de plus en plus de la droite $(D)$, sans être horizontale ni verticale. On dit que $(D)$ est une asymptote oblique.

### Définition

Soient $a$ un réel non nul et $b$ un réel. La droite $(D)$: $y=ax+b$ est une **asymptote oblique** à $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$ si :

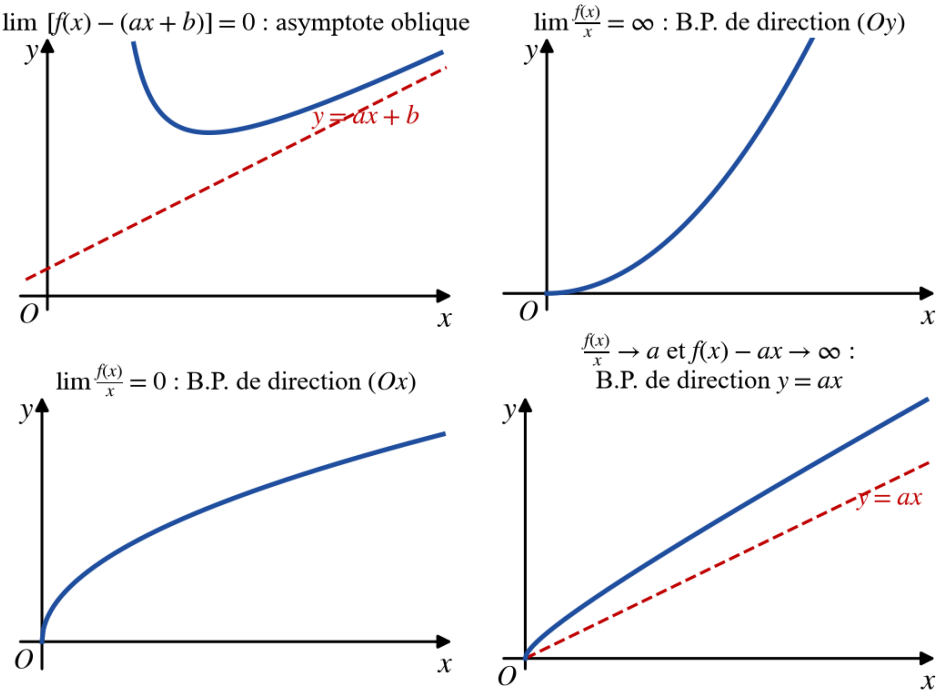
$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

On définit de même une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

### Méthode (étude d'une branche infinie)

Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$, on calcule $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$ :

- si $\lim\frac{f(x)}{x}=a$ ($a$ réel non nul) et $\lim[f(x)-ax]=b$ ($b$ réel), alors la droite $y=ax+b$ est une asymptote oblique ;
- si $\lim\frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ : $(C_f)$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** ;
- si $\lim\frac{f(x)}{x}=0$ : $(C_f)$ admet une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses** ;
- si $\lim\frac{f(x)}{x}=a\neq 0$ et $\lim[f(x)-ax]=\pm\infty$ : $(C_f)$ admet une **branche parabolique de direction la droite** $y=ax$.




## ***Propriété***

Pour étudier la **position relative** de $(C_f)$ et d'une droite $(D)$: $y = ax + b$, on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$ :

- si $f(x) - (ax + b) > 0$ sur un intervalle, $(C_f)$ est au-dessus de $(D)$ sur cet intervalle ;
- si $f(x) - (ax + b) < 0$, $(C_f)$ est au-dessous de $(D)$ ; si $f(x) - (ax + b) = 0$, ils se coupent.

## ***Exemples***

**Exemple 1.** Soit $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (x + 1)] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4}{x-1} = 0$ : la droite $y = x + 1$ est une asymptote oblique à $(C_f)$ au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$. Comme $f(x) - (x + 1) = \frac{4}{x-1}$, $(C_f)$ est au-dessus de l'asymptote sur $]1; +\infty[$ et au-dessous sur $]-\infty; 1[$.

**Exemple 2.** $g(x) = x^2 - 3x$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} (x - 3) = +\infty$ : branche parabolique de direction $(Oy)$ au voisinage de $+\infty$.

**Exemple 3.** $h(x) = x + \sqrt{x}$ : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} [h(x) - x] = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$ : branche parabolique de direction la droite $y = x$.

## ***Application 6***

**1)** Soit $f(x) = \frac{2x^2-x+1}{x-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

*a)* Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)$ ; interpréter.

*b)* Vérifier que $f(x) = 2x + 1 + \frac{2}{x-1}$, puis montrer que la droite $(D)$: $y = 2x + 1$ est une asymptote oblique à $(C_f)$ au voisinage de $\pm\infty$.

*c)* Étudier la position relative de $(C_f)$ et $(D)$.

**2)** Soit $g(x) = x - 2\sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$. Étudier la branche infinie de $(C_g)$ au voisinage de $+\infty$.

***Solution***

- **1) a)** $\lim\limits_{x\to 1}(2x^2-x+1)=2>0$ ; $\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0^+$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0^-$. Donc $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$ : la droite $x=1$ est une asymptote verticale à $(C_f)$.
- **b)** $2x+1+\frac{2}{x-1}=\frac{(2x+1)(x-1)+2}{x-1}=\frac{2x^2-x-1+2}{x-1}=f(x)$. Donc $f(x)-(2x+1)=\frac{2}{x-1}\underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow}0$ : $(D)$ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
- **c)** $f(x)-(2x+1)=\frac{2}{x-1}$ a le signe de $x-1$ : $(C_f)$ est au-dessus de $(D)$ sur $]1;+\infty[$ et au-dessous sur $]-\infty;1[$.
- **2)** $g(x)=\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ ; $\frac{g(x)}{x}=1-\frac{2}{\sqrt{x}}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$ et $g(x)-x=-2\sqrt{x}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$ : $(C_g)$ admet une branche parabolique de direction la droite $y=x$ au voisinage de $+\infty$.

## VI. Éléments de symétrie d'une courbe

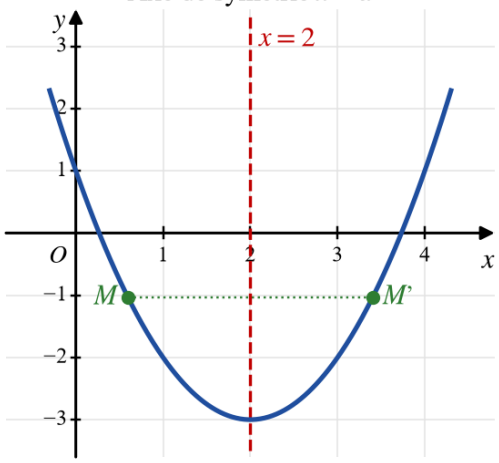
***Propriété***

Soit $f$ une fonction d'ensemble de définition $D_f$, et $(C_f)$ sa courbe dans un repère orthogonal.

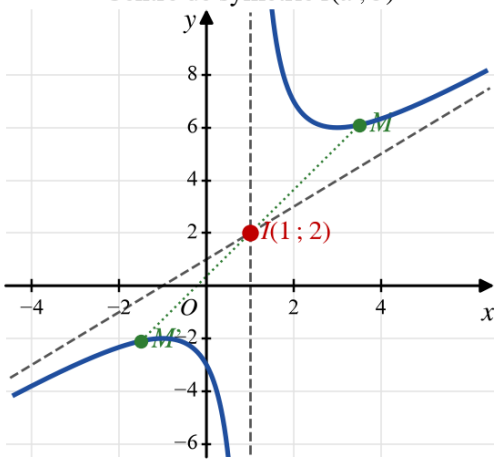
- La droite d'équation $x=a$ est un **axe de symétrie** de $(C_f)$ si, pour tout $x$ de $D_f$ : $2a-x\in D_f$ et $f(2a-x)=f(x)$.
- Le point $I(a;b)$ est un **centre de symétrie** de $(C_f)$ si, pour tout $x$ de $D_f$ : $2a-x\in D_f$ et $f(2a-x)+f(x)=2b$.

Cas particuliers : $f$ **paire** ($a=0$ : axe $(Oy)$) ; $f$ **impaire** ($a=b=0$ : centre $O$).

Axe de symétrie $x=a$




Centre de symétrie $I(a\,;b)$




***Exemples***

**Exemple 1.** $f(x)=x^2-4x+1$ sur $\mathbb{R}$ : pour tout réel $x$, $4-x\in\mathbb{R}$ et $f(4-x)=(4-x)^2-4(4-x)+1=x^2-4x+1=f(x)$. La droite $x=2$ est un axe de symétrie de $(C_f)$.

**Exemple 2.** $f(x)=x+1+\frac{4}{x-1}$ sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ : si $x\neq 1$, alors $2-x\neq 1$, donc $2-x\in D_f$, et :

$$f(2-x)+f(x)=\left(3-x-\frac{4}{x-1}\right)+\left(x+1+\frac{4}{x-1}\right)=4=2\times 2$$

Le point $I(1;2)$, intersection des deux asymptotes, est un centre de symétrie de $(C_f)$.

***Application 7***

**1)** Montrer que le point $I(2;0)$ est un centre de symétrie de la courbe de $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$.

**2)** Montrer que la droite $x = 3$ est un axe de symétrie de la courbe de $g(x) = \frac{1}{x^2-6x+10}$.

***Solution***

- **1)** $D_f = \mathbb{R}$. On développe : $f(4-x) = (4-x)^3 - 6(4-x)^2 + 9(4-x) - 2 = -x^3 + 6x^2 - 9x + 2$. Donc $f(4-x) + f(x) = 0 = 2 \times 0$ : $I(2;0)$ est un centre de symétrie de $(C_f)$ (c'est aussi son point d'inflexion).
- **2)** $x^2 - 6x + 10 = (x-3)^2 + 1 > 0$, donc $D_g = \mathbb{R}$ et $6 - x \in D_g$. De plus $(6-x)^2 - 6(6-x) + 10 = x^2 - 6x + 10$, donc $g(6-x) = g(x)$ : la droite $x = 3$ est un axe de symétrie.

## VII. Étude complète d'une fonction

### Méthode : plan d'étude d'une fonction

**1)** Déterminer l'ensemble de définition $D_f$ (et éventuellement réduire l'étude grâce à une symétrie).
**2)** Calculer les limites aux bornes de $D_f$ ; en déduire les asymptotes verticales et horizontales.
**3)** Étudier la continuité et la dérivabilité (en particulier aux points « à problème » : racines, valeurs absolues, raccordements).
**4)** Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations.
**5)** Étudier les branches infinies (asymptotes obliques, branches paraboliques) et les positions relatives.
**6)** Étudier la concavité ($f''$) et les points d'inflexion, si c'est demandé.
**7)** Chercher les points remarquables (intersections avec les axes, tangentes), puis tracer : asymptotes d'abord, puis points et tangentes, enfin la courbe.

***Exemple complet*** **:** $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

**1) Ensemble de définition.** $f(x)$ existe si et seulement si $x \neq 1$ : $D_f = ]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. Pour tout $x \neq 1$ : $f(x) = x + 1 + \frac{4}{x-1}$ (car $(x+1)(x-1) + 4 = x^2 + 3$).

**2) Limites.** $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x = \pm\infty$. En $1$ : $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3) = 4 > 0$, donc $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ : la droite $x = 1$ est une asymptote verticale.

**3) Dérivée.** $f$ est rationnelle, donc dérivable sur $D_f$, et :

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

$f'(x)$ a le signe de $(x-3)(x+1)$ ; $f(-1) = \frac{4}{-2} = -2$ et $f(3) = \frac{12}{2} = 6$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | $-\infty$ | ↗ | $-2$ | ↘ | $-\infty$ $\quad +\infty$ | ↘ | $6$ | ↗ | $+\infty$ |

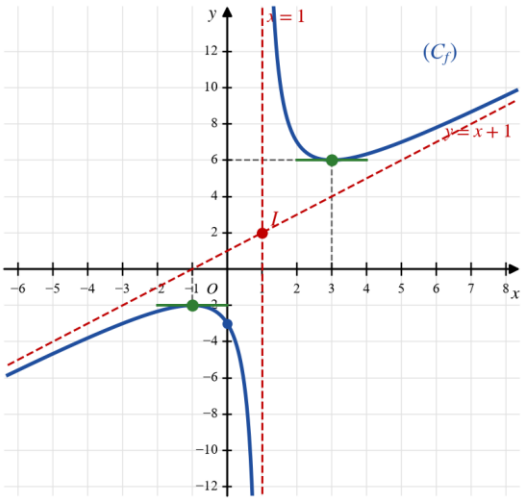
$f$ admet un maximum local $f(-1) = -2$ et un minimum local $f(3) = 6$.

**4) Asymptote oblique.** $f(x) - (x+1) = \frac{4}{x-1} \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ : la droite $(D): y = x + 1$ est asymptote oblique au voisinage de $\pm\infty$ ; $(C_f)$ est au-dessus de $(D)$ sur $]1; +\infty[$ et au-dessous sur $]-\infty; 1[$.

**5) Concavité.** $f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$ : $(C_f)$ est concave sur $]-\infty; 1[$ et convexe sur $]1; +\infty[$ ; il n'y a pas de point d'inflexion ($1 \notin D_f$).

**6) Symétrie et points remarquables.** $I(1; 2)$ est un centre de symétrie (paragraphe VI). $f(0) = -3$ : $(C_f)$ coupe $(Oy)$ en $(0; -3)$ ; $x^2 + 3 > 0$, donc $(C_f)$ ne coupe pas $(Ox)$.

**7) Courbe.** On trace les asymptotes $x = 1$ et $y = x + 1$, les tangentes horizontales aux points $(-1; -2)$ et $(3; 6)$, puis la courbe.




**8) Lecture graphique.** Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ est le nombre de points d'intersection de $(C_f)$ avec la droite horizontale $y = m$ :

- si $m < -2$ : deux solutions (dans $]-\infty; 1[$) ;
- si $m = -2$ : une solution ($x = -1$) ;
- si $-2 < m < 6$ : aucune solution ;
- si $m = 6$ : une solution ($x = 3$) ;
- si $m > 6$ : deux solutions (dans $]1; +\infty[$).

## VIII. Erreurs fréquentes

| Erreur fréquente | Ce qu'il faut faire |
|---|---|
| Calculer $f'(a)$ avec la formule de la dérivée en un point où $f$ n'est pas dérivable (racine qui s'annule, raccordement). | En un point « à problème », revenir à la définition : limite du taux d'accroissement à droite et à gauche. |
| Conclure « $f'(a) = 0$, donc $f$ admet un extremum en $a$ ». | Vérifier que $f'$ change de signe en $a$ (contre-exemple : $x \mapsto x^3$ en 0). |
| Écrire $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$ ou $(u^n)' = nu^{n-1}$. | Ne pas oublier le facteur $u'$ : $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $nu'u^{n-1}$. |
| Affirmer qu'une droite est asymptote oblique après avoir seulement calculé $\lim \frac{f(x)}{x} = a$. | Il faut aussi que $\lim[f(x) - ax]$ soit un réel $b$ ; sinon c'est une branche parabolique. |
| Écrire $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$. | Le bon point est $x_0 = f^{-1}(y_0)$ : $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$. |
| Annoncer un point d'inflexion dès que $f''(a) = 0$. | Vérifier que $f''$ change de signe en $a$. |

## IX. À retenir

- **Nombre dérivé :** $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ ; tangente $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ ; ${f'}_d(a) \neq {f'}_g(a)$ : point anguleux ; limite infinie : demi-tangente verticale.
- **Dérivées :** $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ ; $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ; $\left(\sqrt[n]{u}\right)' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ ; $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$ ; $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$ avec $y_0 = f(x_0)$ et $f'(x_0) \neq 0$.
- **Variations :** signe de $f'$ ; extremum en $a$ si $f'$ s'annule en changeant de signe.
- **Concavité :** $f'' \geq 0$ : convexe ; $f'' \leq 0$ : concave ; $f''$ s'annule en changeant de signe : point d'inflexion.

- **Branches infinies :** $\lim[f(x) - (ax+b)] = 0$ : asymptote oblique ; $\lim \frac{f(x)}{x} = \infty$ : B.P. de direction $(Oy)$ ; $\lim \frac{f(x)}{x} = 0$ : B.P. de direction $(Ox)$ ; $\lim \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim[f(x) - ax] = \infty$ : B.P. de direction $y = ax$.
- **Symétries :** axe $x = a$ : $f(2a-x) = f(x)$ ; centre $I(a;b)$ : $f(2a-x) + f(x) = 2b$ (avec $2a - x \in D_f$).