Fiche technique

Professeur : Yassine NACHIT	**Matière : Mathématiques**

Suites numériques

	Durée : 12 heures	***Niveau : 2 BAC PC***
Les capacités attendues	• Calculer la limite d'une suite à l'aide des suites de référence et des opérations. • Utiliser les critères de convergence (gendarmes, comparaison, suites monotones). • Étudier une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ et déterminer sa limite. • Utiliser les suites arithmétiques et géométriques dans des situations variées.	
Contenus du programme	• Limite finie, limite infinie ; suites (n^p), (n^r), (q^n). • Opérations sur les limites ; limites et ordre ; critères de convergence. • Convergence des suites monotones ; suites $f(u_n)$. • Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue.	
Recommandations pédagogiques	• On partira d'exemples numériques pour introduire la notion de limite d'une suite. • Les propriétés des limites et des suites monotones seront admises et exploitées. • On se limitera à des suites récurrentes simples, en lien avec la continuité.	
Fichiers utilisés dans la préparation du cours	• Les orientations pédagogiques. • Livre de l'élève. • Des sites Internet éducatifs. • Distribution périodique du programme de mathématiques.	
Rôle de l'enseignant	• Écrire l'activité au tableau • Marquer les difficultés • Répartir les tâches • Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle • Diagnostiquer les prérequis des apprenants • Noter les observations	
Rôle de l'apprenant	• Écrire les activités • Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions. • Formuler les résultats de l'activité sous forme de théorème ou de propriété. • Répondre aux exercices	

Outils didactiques : Tableau, livre, craie, marqueurs …..

Suites numériques

I. Rappels sur les suites numériques

1. Suite majorée, suite minorée, suite bornée

Définition

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq n_0$.

- (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que : pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq M$.
- (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que : pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq m$.
- (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$. On écrit : $u_n = \frac{2(n+1)-1}{n+1} = 2 - \frac{1}{n+1}$. Comme $0 < \frac{1}{n+1} \leq 1$, on obtient $1 \leq u_n < 2$: la suite (u_n) est minorée par 1, majorée par 2, donc bornée.

Méthode : le raisonnement par récurrence

Pour montrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$:

1) **Initialisation :** on vérifie que $P(n_0)$ est vraie.
2) **Hérédité :** on suppose que $P(n)$ est vraie pour un entier $n \geq n_0$ (hypothèse de récurrence) et on montre que $P(n+1)$ est vraie.
3) **Conclusion :** d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exemple (suite « fil rouge » du chapitre)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrons par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 4$.

- **Initialisation :** $u_0 = 1$ et $0 < 1 < 4$: la propriété est vraie pour $n = 0$.
- **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$; supposons que $0 < u_n < 4$. Alors $4 < 3u_n + 4 < 16$, donc $2 < \sqrt{3u_n + 4} < 4$, c'est-à-dire $2 < u_{n+1} < 4$. En particulier $0 < u_{n+1} < 4$.
- **Conclusion :** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 4$. La suite (u_n) est bornée.

2. Monotonie d'une suite

Définition

- (u_n) est **croissante** si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est **décroissante** si : pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante. Avec des inégalités strictes, on dit « strictement croissante » ou « strictement décroissante ».

Méthode : étudier la monotonie d'une suite

- On étudie le **signe de la différence** $u_{n+1} - u_n$ (méthode la plus utilisée).
- Si tous les termes sont **strictement positifs**, on peut comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.
- Si $u_n = f(n)$, la suite (u_n) a le même sens de variation que la fonction f sur $[n_0; +\infty[$.
- Pour une suite récurrente, on peut aussi montrer par récurrence que $u_{n+1} \geq u_n$.

Exemple 1

Reprenons la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en multipliant par l'expression conjuguée :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} = \frac{(4 - u_n)(1 + u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

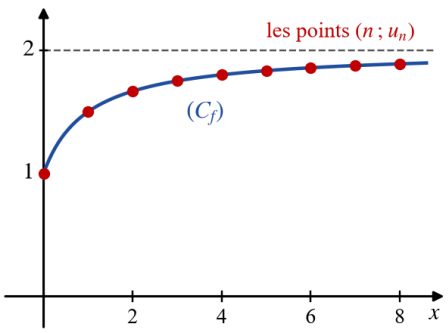
Comme $0 < u_n < 4$, on a $4 - u_n > 0$, $1 + u_n > 0$ et le dénominateur est strictement positif. Donc $u_{n+1} - u_n > 0$: la suite (u_n) est strictement croissante.

Exemple 2 : suite définie par $u_n = f(n)$

Soit $u_n = \frac{2n+1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a $u_n = f(n)$ avec $f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$.

Pour tout $x \geq 0$: $f'(x) = \frac{2(x+1)-(2x+1)}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2} > 0$, donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Par suite, pour tout n : $n < n+1 \Rightarrow f(n) < f(n+1)$, c'est-à-dire $u_n < u_{n+1}$: la suite (u_n) est strictement croissante. Les points $(n\,; u_n)$ sont sur la courbe de f.



Application 1

Étudier la monotonie de chacune des suites suivantes, définies pour $n \in \mathbb{N}$:

1) $a_n = n^2 - 6n$;

2) $b_n = \frac{2^n}{n+1}$ (on comparera $\frac{b_{n+1}}{b_n}$ à 1) ;

3) $c_n = \frac{3n+5}{n+2}$ (on utilisera une fonction).

Solution

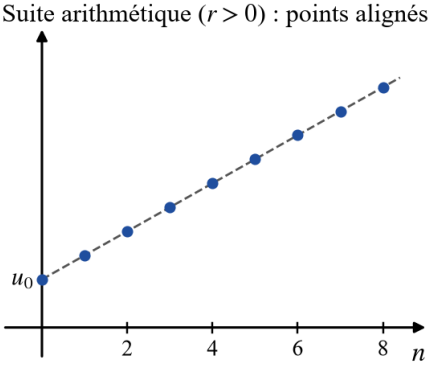
- **1)** $a_{n+1} - a_n = ((n+1)^2 - 6(n+1)) - (n^2 - 6n) = 2n - 5$. Ce nombre est négatif pour $n \leq 2$ et positif pour $n \geq 3$: la suite décroît de a_0 à a_3, puis elle est croissante à partir du rang 3 ; elle n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$.
- **2)** Tous les termes sont strictement positifs et $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{n+2} \times \frac{n+1}{2^n} = \frac{2(n+1)}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} \geq 1$ car $2n + 2 \geq n + 2$. Donc (b_n) est croissante (strictement à partir du rang 1).
- **3)** $c_n = g(n)$ avec $g(x) = \frac{3x+5}{x+2}$; $g'(x) = \frac{3(x+2)-(3x+5)}{(x+2)^2} = \frac{1}{(x+2)^2} > 0$, donc g est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et (c_n) est strictement croissante.

3. Suites arithmétiques et suites géométriques

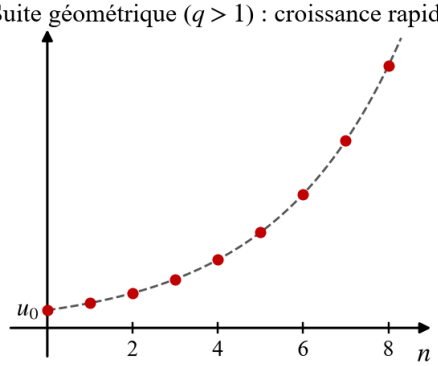
	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n-p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$	$S = (n-p+1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$	$S = u_p \times \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$ (si $q \neq 1$)
Trois termes consécutifs a, b, c	$a + c = 2b$	$a \times c = b^2$

Dans les deux sommes, $n - p + 1$ est le **nombre de termes** : « somme = nombre de termes × (premier terme + dernier terme) / 2 » pour une suite arithmétique, et « premier terme × $\frac{1-q^N}{1-q}$ », où N est le nombre de termes, pour une suite géométrique.

Suite arithmétique ($r > 0$) : points alignés



Suite géométrique ($q > 1$) : croissance rapide



Application 2

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4$. On pose $v_n = u_n - 6$.

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique ; préciser sa raison et son premier terme.
2) Exprimer v_n, puis u_n, en fonction de n.
3) Calculer, en fonction de n, la somme $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

Solution

- **1)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{3}u_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}u_n - 2 = \frac{1}{3}(u_n - 6) = \frac{1}{3}v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -4$.
- **2)** $v_n = v_0 \times q^n = -4\left(\frac{1}{3}\right)^n$, donc $u_n = v_n + 6 = 6 - 4\left(\frac{1}{3}\right)^n$.
- **3)** $S_n = (v_0 + 6) + (v_1 + 6) + \cdots + (v_n + 6) = 6(n+1) + (v_0 + v_1 + \cdots + v_n)$. Or :

$$v_0 + v_1 + \cdots + v_n = -4 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = -6\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

Donc : $S_n = 6(n+1) - 6 + 6\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} = 6n + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$. (Vérification : pour $n = 0$, on trouve bien $S_0 = 2 = u_0$.)

II. Limite d'une suite numérique

1. Limite infinie

Activité 1

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$.

1) Calculer u_{10}, u_{100} et u_{1000}.

2) À partir de quel rang a-t-on $u_n > 10^6$? $u_n > 10^{10}$?

3) Soit A un réel positif quelconque. Peut-on trouver un rang à partir duquel $u_n > A$?

Réponse. $u_{10} = 100$, $u_{100} = 10^4$, $u_{1000} = 10^6$. On a $u_n > 10^6$ dès que $n > 1000$ et $u_n > 10^{10}$ dès que $n > 10^5$. Plus généralement, $u_n > A$ dès que $n > \sqrt{A}$: les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on veut. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$.

Définition

- On dit que la suite (u_n) **tend vers** $+\infty$ si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- On dit que (u_n) **tend vers** $-\infty$ si tout intervalle de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Propriété (suites de référence)

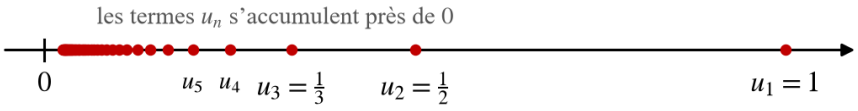
Pour tout entier $p \geq 1$:

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty \quad ; \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

2. Limite finie – suite convergente

Activité 2

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \frac{1}{n}$. On a placé ses premiers termes sur une droite graduée :

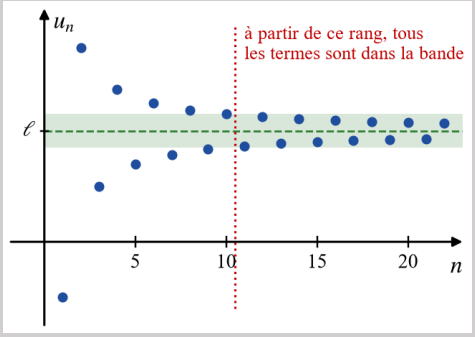


Les termes se rapprochent de 0 : on a $0 < u_n < 0{,}01$ dès que $n > 100$, et $0 < u_n < 10^{-6}$ dès que $n > 10^6$. Tout intervalle ouvert centré en 0, aussi petit soit-il, contient tous les termes à partir d'un certain rang. On dit que (u_n) tend vers 0.

Définition

Soit ℓ un réel. On dit que la suite (u_n) **tend vers** ℓ si tout intervalle ouvert centré en ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

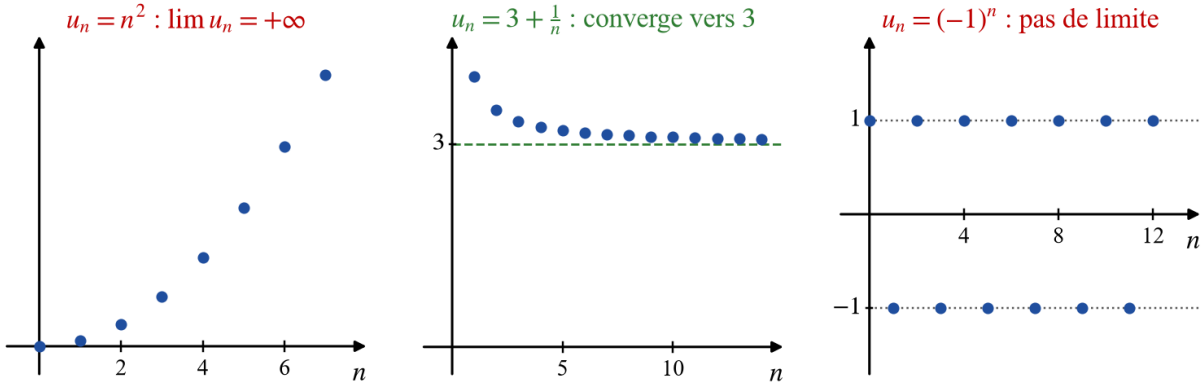
On écrit : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.



- Une suite qui admet une limite **finie** est dite **convergente**.
- Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente** : sa limite est infinie, ou bien elle n'a pas de limite.

Propriété

- Pour tout entier $p \geq 1$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$; $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- Si une suite admet une limite, alors cette limite est **unique**.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ équivaut à $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0$.



Exemples

- $u_n = 3 + \frac{1}{n}$: $u_n - 3 = \frac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$; la suite est convergente.
- $u_n = n^2$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; la suite est divergente.
- $u_n = (-1)^n$: les termes valent alternativement 1 et -1 ; la suite n'a pas de limite, elle est divergente.

3. *Opérations sur les limites*

Les règles sont les mêmes que pour les limites de fonctions en $+\infty$. Dans les tableaux, ℓ et ℓ' sont des réels et « F.I. » désigne une forme indéterminée.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim(u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

$\lim u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim v_n$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim(u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	∞ (règle des signes)	∞ (règle des signes)	F.I.

$\lim u_n$	ℓ	ℓ	∞	$\ell \neq 0$	0	∞
$\lim v_n$	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	0^+ ou 0^-	0	∞
$\lim \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞ (signes)	∞ (signes)	F.I.	F.I.

Méthode : lever une forme indéterminée

- **Polynôme en n :** sa limite est celle de son terme de plus haut degré.
- **Quotient de deux polynômes en n :** sa limite est celle du quotient des termes de plus haut degré.
- **Différence de racines carrées** (forme « $+\infty - \infty$ ») : on multiplie par l'expression conjuguée.
- **Dans les autres cas :** on met en facteur le terme dominant.

Exemples

- $\lim\limits_{n\to+\infty}(3n^2-5n+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} 3n^2 = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2+n}{n^2+3} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{n^2} = 2$.
- $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ et le dénominateur tend vers $+\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = 0$.

Application 3

Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

1) $u_n = \frac{4n^3-n+2}{2n^3+5}$

2) $v_n = \frac{n-3}{n^2+1}$

3) $w_n = \left(\frac{3}{n}-2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+5\right)$

4) $t_n = \sqrt{4n^2+n}-2n$

Solution

- **1)** $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n^3}{2n^3} = 2$.
- **2)** $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.
- **3)** $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{n}-2\right) = -2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+5\right) = 5$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -2\times 5 = -10$.
- **4)** Forme « $+\infty - \infty$ ». Pour $n \geq 1$, on multiplie par l'expression conjuguée :

$$t_n = \frac{(4n^2+n)-4n^2}{\sqrt{4n^2+n}+2n} = \frac{n}{n\left(\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{4+\frac{1}{n}}+2}$$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = \frac{1}{\sqrt{4}+2} = \frac{1}{4}$.

III. Limites et ordre – critères de convergence

1. Critères de comparaison

Propriété (critères de convergence)

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites numériques et ℓ un réel. On suppose que les inégalités ci-dessous sont vraies à partir d'un certain rang.

- **Théorème des gendarmes :** si $v_n \leq u_n \leq w_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- Si $|u_n - \ell| \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
- Si $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 1

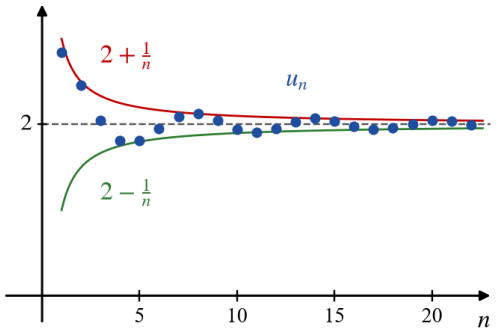
Soit (u_n) la suite définie pour $n \geq 1$ par $u_n = 2 + \frac{\sin n}{n}$.

Pour tout $n \geq 1$: $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc :

$$2 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{1}{n}$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 - \frac{1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(2 + \frac{1}{n}\right) = 2$. D'après le théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

Sur la figure, les points de la suite sont « coincés » entre les deux courbes.



Exemples 2 et 3

- $u_n = n^2 + n\cos n$: comme $\cos n \geq -1$, on a $u_n \geq n^2 - n$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} (n^2 - n) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- $v_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n^2}$: $|v_n - 5| = \frac{1}{n^2}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 5$.

Propriété (passage à la limite dans une inégalité)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites **convergentes**.

- Si $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
- En particulier : si $a \leq u_n \leq b$ à partir d'un certain rang et si (u_n) converge vers ℓ, alors $a \leq \ell \leq b$.

Remarque

Une inégalité stricte devient large à la limite : pour tout $n \geq 1$, $\frac{1}{n} > 0$, et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

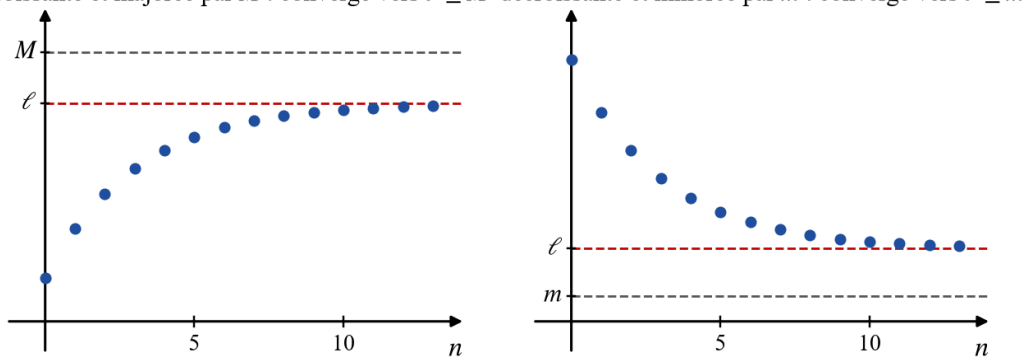
2. Convergence des suites monotones

Théorème (convergence monotone)

On admet les résultats suivants :

- Toute suite **croissante et majorée** est **convergente**.
- Toute suite **décroissante et minorée** est **convergente**.
- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$; toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.

croissante et majorée par M : converge vers $\ell \leq M$ décroissante et minorée par m : converge vers $\ell \geq m$



Remarque

- Ce théorème prouve que la limite **existe**, mais il ne donne pas sa valeur. Si (u_n) est croissante et majorée par M, on sait seulement que sa limite ℓ vérifie $\ell \leq M$.
- La suite « fil rouge » $(u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4})$ est croissante et majorée par 4 : elle est donc convergente. Sa limite sera calculée au paragraphe VI.
- Une suite peut être convergente sans être monotone : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$ tend vers 0 en changeant de signe à chaque rang.

Application 4

1) Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

a) $u_n = \frac{3n+\sin n}{n+2}$

b) $v_n = n^2 + (-1)^n n$

c) $w_n = \frac{\cos n}{\sqrt{n}} (n \geq 1)$

2) Pour $n \geq 1$, on pose $s_n = \frac{1}{1\times2} + \frac{1}{2\times3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$.

a) Montrer que la suite (s_n) est croissante.

b) Vérifier que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour tout entier $k \geq 1$, puis en déduire que $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$.

c) En déduire que (s_n) est majorée, puis calculer sa limite.

Solution

- **1) a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc $\frac{3n-1}{n+2} \leq u_n \leq \frac{3n+1}{n+2}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n-1}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{n+2} = 3$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$ (théorème des gendarmes).
- **b)** $(-1)^n \geq -1$, donc $v_n \geq n^2 - n = n(n-1)$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n(n-1) = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
- **c)** $|w_n| = \frac{|\cos n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.

- **2) a)** $s_{n+1} - s_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$, donc (s_n) est strictement croissante.
- **b)** $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$. Donc, les termes se simplifiant deux à deux :

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

- **c)** Pour tout $n \geq 1$: $s_n = 1 - \frac{1}{n+1} < 1$, donc (s_n) est majorée par 1. Étant croissante et majorée, elle est convergente, et $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 1 - 0 = 1$.

IV. Limites de suites particulières

1. La suite géométrique (q^n)

Activité 3

À l'aide de la calculatrice, compléter le tableau suivant, puis conjecturer la limite de la suite (q^n) dans chaque cas.

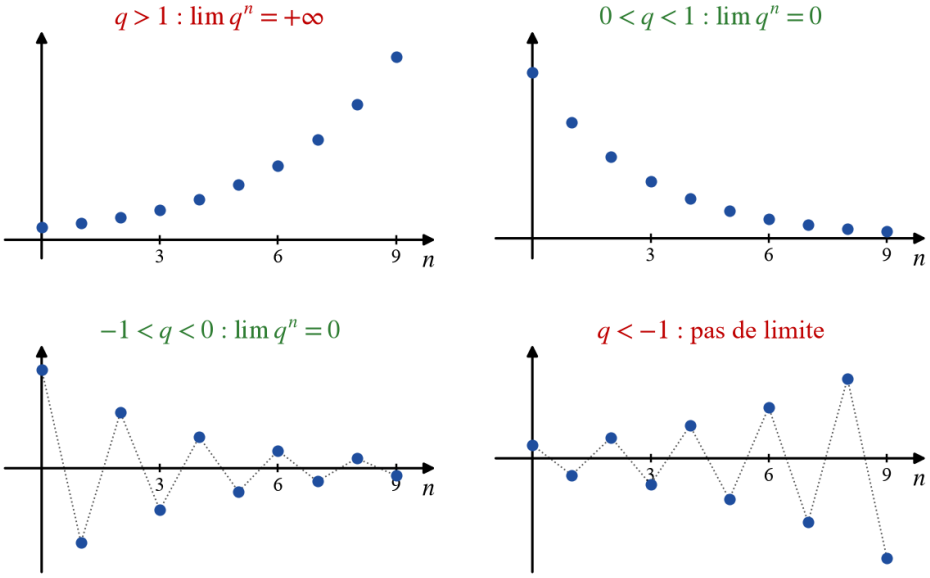
n	5	10	20	50
2^n	32	1024	$\approx 1{,}05 \times 10^6$	$\approx 1{,}13 \times 10^{15}$
$(0{,}5)^n$	$\approx 0{,}031$	$\approx 0{,}00098$	$\approx 9{,}5 \times 10^{-7}$	$\approx 8{,}9 \times 10^{-16}$
$(-2)^n$	-32	1024	$\approx 1{,}05 \times 10^6$	$\approx 1{,}13 \times 10^{15}$

On conjecture : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$; $\lim\limits_{n\to+\infty} (0{,}5)^n = 0$; la suite $((-2)^n)$ prend des valeurs de plus en plus grandes en valeur absolue, en changeant de signe à chaque rang ($(-2)^{21} < 0$) : elle n'a pas de limite.

Propriété (limite de q^n)

Soit q un réel.

- Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $q = 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite.



Application 5

Le but est de démontrer le premier point de la propriété. Soit a un réel strictement positif.

1) Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$ (inégalité de Bernoulli).

2) Soit $q > 1$. En posant $a = q-1$, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

3) Soit $0 < q < 1$. En écrivant $q^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{q}\right)^n}$, en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Solution

- **1)** *Initialisation :* $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$: l'inégalité est vraie pour $n = 0$. *Hérédité :* supposons $(1+a)^n \geq 1+na$. Comme $1+a > 0$, on multiplie par $1+a$:

$$(1+a)^{n+1} \geq (1+na)(1+a) = 1 + (n+1)a + na^2 \geq 1 + (n+1)a$$

car $na^2 \geq 0$. *Conclusion :* pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

- **2)** Si $q > 1$, alors $a = q-1 > 0$ et $q^n = (1+a)^n \geq 1+na$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na) = +\infty$ (car $a > 0$), donc, par comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- **3)** Si $0 < q < 1$, alors $\frac{1}{q} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n = +\infty$ et, par passage à l'inverse, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Méthode

Lorsqu'une expression contient plusieurs puissances a^n, b^n…, on **met en facteur la puissance dont la base a la plus grande valeur absolue** : il apparaît alors des suites (q^n) avec $-1 < q < 1$, qui tendent vers 0.

Exemples

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$; $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{2} > 1$; la suite $((-5)^n)$ n'a pas de limite car $-5 \leq -1$.
- $5^n - 3^n = 5^n\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}(5^n - 3^n) = +\infty$.
- $\frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n} = \frac{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{3^n\left(1+\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)} = \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n-2^n}{3^n+2^n} = 1$.

Conséquence (somme des termes d'une suite géométrique)

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q telle que $-1 < q < 1$, de premier terme u_0. Alors :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{u_0}{1-q}$$

Exemple : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

2. La suite (n^r) avec r rationnel non nul

Propriété

- Si $r > 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = +\infty$.
- Si $r < 0$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} n^r = 0$.

Exemples

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^2} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{2}{3}} = +\infty$ car $\frac{2}{3} > 0$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{3}{2}} = 0$ car $-\frac{3}{2} < 0$.
- $\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = n^{-\frac{1}{6}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}} = 0$.

Application 6

Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

1) $a_n = \left(\frac{7}{5}\right)^n - 2$

2) $b_n = \frac{2^{n+1}+5}{3^n}$

3) $c_n = \frac{4^n+3^n}{4^n-1}$

4) $d_n = \frac{n\sqrt{n}}{n^2+1}$

5) $S_n = 3 + \frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \cdots + \frac{3}{4^n}$

Solution

- **1)** $\frac{7}{5} > 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{5}\right)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
- **2)** $b_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5\left(\frac{1}{3}\right)^n$; comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$ et $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.
- **3)** On factorise par 4^n : $c_n = \frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = \frac{1+0}{1-0} = 1$.
- **4)** $d_n = \frac{n^{\frac{3}{2}}}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \frac{n^{-\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{n^2}}$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{-\frac{1}{2}} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 0$.
- **5)** S_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 3 et de raison $\frac{1}{4}$: $S_n = 3 \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} = 4\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 4$.

V. *Suites de la forme* $v_n = f(u_n)$

Propriété

Soit (u_n) une suite dont tous les termes appartiennent à un intervalle I, et soit f une fonction définie sur I.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et si f est **continue en** ℓ, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$$

Exemples

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4n+1}{n+2} = 4$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 4, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{4n+1}{n+2}} = \sqrt{4} = 2$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi n}{3n+1} = \frac{\pi}{3}$ et la fonction cosinus est continue en $\frac{\pi}{3}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi n}{3n+1}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{8n^2+1}{n^2+3} = 8$ et la fonction $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est continue en 8, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{8n^2+1}{n^2+3}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Remarque

Plus généralement, si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ et $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ (avec $u_n \neq a$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = L$. Par exemple, $n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1$.

Application 7

Calculer la limite de chacune des suites suivantes :

1) $u_n = \sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+n}}$

2) $v_n = \cos\left(\frac{\pi n^2+1}{n^2+2}\right)$

3) $w_n = \tan\left(\frac{\pi n}{4n+3}\right)$

4) $t_n = n\tan\left(\frac{2}{n}\right)$ $(n \geq 2)$

Solution

- **1)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{9n^2+1}{n^2+n} = 9$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 9, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \sqrt{9} = 3$.
- **2)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi n^2+1}{n^2+2} = \pi$ et la fonction cosinus est continue en π, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \cos\pi = -1$.
- **3)** $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi n}{4n+3} = \frac{\pi}{4}$ et la fonction tangente est continue en $\frac{\pi}{4}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \tan\frac{\pi}{4} = 1$.
- **4)** $t_n = 2 \times \frac{\tan\left(\frac{2}{n}\right)}{\frac{2}{n}}$; or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 2 \times 1 = 2$.

VI. Suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Représentation graphique des termes

Activité 4

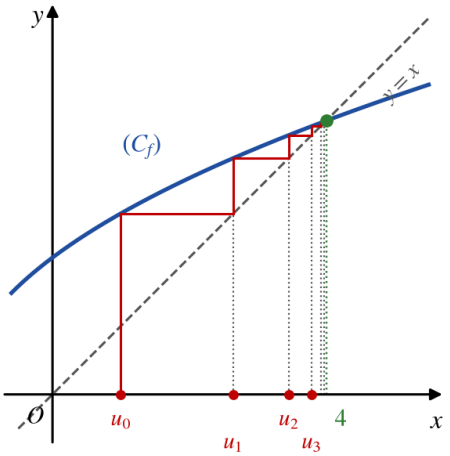
On reprend la suite « fil rouge » : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{3x+4}$.

Pour placer les termes sur l'axe des abscisses :

1) on part de u_0 sur l'axe des abscisses ; on « monte » jusqu'à la courbe (C_f) : on lit $u_1 = f(u_0)$ sur l'axe des ordonnées ;

2) on reporte u_1 sur l'axe des abscisses à l'aide de la droite d'équation $y = x$;

3) on recommence à partir de u_1 pour obtenir u_2, puis u_3…



Conjecture : la suite est croissante et ses termes s'approchent de l'abscisse 4 du point d'intersection de (C_f) et de la droite $y = x$, c'est-à-dire d'une solution de l'équation $f(x) = x$.

2. Limite d'une suite récurrente

Théorème (admis)

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I telle que $f(I) \subset I$, et soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in I$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Si la suite (u_n) est **convergente** vers un réel ℓ appartenant à I, alors ℓ est solution de l'équation :

$$f(x) = x \qquad (x \in I)$$

Remarque

- La condition $f(I) \subset I$ assure que tous les termes de la suite restent dans I : si $u_n \in I$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in f(I) \subset I$.
- Lorsque I est un segment $[a; b]$, la limite ℓ appartient automatiquement à $[a; b]$ (passage à la limite dans $a \leq u_n \leq b$).
- Le théorème ne prouve pas que la suite converge : on le démontre d'abord (monotone et bornée, par exemple), puis on calcule la limite en résolvant $f(x) = x$.

Méthode : rédaction type « examen national »

1) Montrer par récurrence que tous les termes appartiennent à I (souvent un encadrement $a \leq u_n \leq b$).
2) Étudier la monotonie de (u_n) : signe de $u_{n+1} - u_n$.
3) Conclure que (u_n) converge (croissante et majorée, ou décroissante et minorée).
4) Justifier que f est continue sur I et que $f(I) \subset I$.
5) Résoudre l'équation $f(x) = x$ dans I ; si elle a plusieurs solutions, choisir à l'aide de la monotonie et des inégalités obtenues.

Exemple

Terminons l'étude de la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$, avec $f(x) = \sqrt{3x + 4}$ et $I = [1; 4]$.

- Pour tout n : $1 \leq u_n < 4$ (paragraphe I, avec $u_0 = 1$ et $u_{n+1} > 2$ pour $n \geq 0$) et (u_n) est strictement croissante. Étant croissante et majorée par 4, elle est convergente ; notons ℓ sa limite.
- f est continue et croissante sur $I = [1; 4]$, donc $f(I) = [f(1); f(4)] = \left[\sqrt{7}; 4\right] \subset I$. Comme $u_0 \in I$, la limite ℓ appartient à I et vérifie $f(\ell) = \ell$.
- Pour $x \in [1; 4]$: $\sqrt{3x + 4} = x \Leftrightarrow 3x + 4 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$. La seule solution dans $[1; 4]$ est $x = 4$.

Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$, ce que confirmait la figure de l'activité 4.

Application 8

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$.

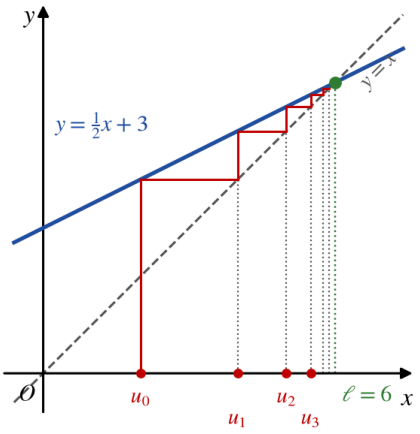
1) Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 6$.
2) Montrer que la suite (u_n) est croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.
3) Déterminer la limite de (u_n) à l'aide de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 3$.
4) On pose $v_n = u_n - 6$. Montrer que (v_n) est géométrique, puis retrouver la limite de (u_n).

Solution

- **1)** $u_0 = 2 < 6$. Soit $n \in \mathbb{N}$; si $u_n < 6$, alors $\frac{1}{2}u_n < 3$, donc $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 < 6$. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 6$.
- **2)** $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{1}{2}u_n = \frac{1}{2}(6 - u_n) > 0$ car $u_n < 6$. La suite est croissante et majorée par 6, donc elle converge vers un réel ℓ.
- **3)** f est continue sur $I = [2; 6]$ et croissante, donc $f(I) = [f(2); f(6)] = [4; 6] \subset I$; de plus $u_0 \in I$. La limite ℓ vérifie donc $f(\ell) = \ell$:

$$\frac{1}{2}\ell + 3 = \ell \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ell = 3 \Leftrightarrow \ell = 6$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.



- **4)** $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = \frac{1}{2}u_n - 3 = \frac{1}{2}(u_n - 6) = \frac{1}{2}v_n$: (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et $v_0 = -4$. Donc $u_n = 6 - 4\left(\frac{1}{2}\right)^n$ et, comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$.

Application 9

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1) Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 2$.

2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-2)(u_n+1)}{\sqrt{u_n+2}+u_n}$, puis en déduire la monotonie de (u_n).

3) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Solution

- **1)** $u_0 = 5 > 2$. Si $u_n > 2$, alors $u_n + 2 > 4$, donc $\sqrt{u_n + 2} > 2$, c'est-à-dire $u_{n+1} > 2$. Donc $u_n > 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **2)** On multiplie par l'expression conjuguée :

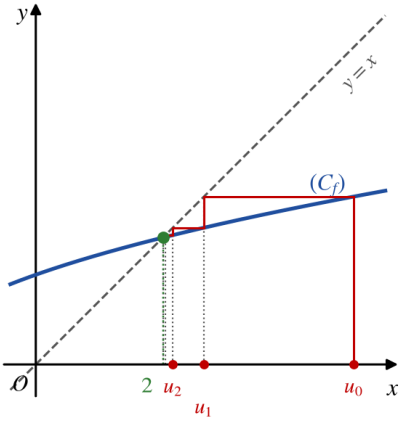
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n + 2) - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$$

car $-x^2 + x + 2 = -(x - 2)(x + 1)$. Comme $u_n > 2$, le numérateur est strictement négatif et le dénominateur strictement positif : (u_n) est strictement décroissante.

- **3)** (u_n) est décroissante et minorée par 2 : elle converge vers un réel ℓ.
- La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x + 2}$ est continue et croissante sur $I = [2; 5]$, et $f(I) = [2; \sqrt{7}] \subset I$; de plus $u_0 \in I$. Donc $\ell \in I$ et $f(\ell) = \ell$:

$$\sqrt{\ell + 2} = \ell \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 2)(\ell + 1) = 0$$

Comme $\ell \in [2; 5]$, on obtient $\ell = 2$: $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$. Sur la figure, les termes « descendent » l'escalier vers le point d'abscisse 2.



VII. Erreurs fréquentes

Erreur fréquente	Ce qu'il faut faire
Écrire « (u_n) est croissante et majorée, donc $\lim u_n = M$ ».	Le théorème donne seulement l'existence de la limite ℓ, avec $\ell \leq M$; on la calcule ensuite.
Résoudre $f(x) = x$ sans avoir prouvé que la suite converge.	Démontrer d'abord la convergence (monotone et bornée), puis vérifier les hypothèses du théorème.
Garder une solution de $f(x) = x$ qui n'est pas dans I.	Ne retenir que les solutions de l'intervalle I (ou de l'encadrement prouvé par récurrence).
Écrire $\lim q^n = 0$ pour $q = -2$, ou $\lim q^n = +\infty$ pour $q = -3$.	Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite.
Se tromper dans le nombre de termes d'une somme.	De u_p à u_n, il y a $n - p + 1$ termes.
Oublier l'initialisation, ou utiliser $P(n+1)$ dans l'hérédité.	Rédiger les trois étapes : initialisation, hérédité (à partir de $P(n)$), conclusion.
Conclure « $u_n > 0$ pour tout n, donc $\lim u_n > 0$ ».	Une inégalité stricte devient large à la limite : $\lim u_n \geq 0$.

VIII. À retenir

- **Suites de référence :** $\lim n^p = +\infty$ et $\lim \frac{1}{n^p} = 0$ $(p \geq 1)$; $\lim n^r = +\infty$ si $r > 0$ et $\lim n^r = 0$ si $r < 0$ $(r \in \mathbb{Q})$.
- **Suite (q^n) :** $+\infty$ si $q > 1$; 1 si $q = 1$; 0 si $-1 < q < 1$; pas de limite si $q \leq -1$.
- **Opérations :** mêmes règles que pour les fonctions ; formes indéterminées : $+\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.
- **Critères :** gendarmes $(v_n \leq u_n \leq w_n)$; $|u_n - \ell| \leq v_n$ avec $v_n \to 0$; $u_n \geq v_n \to +\infty$; $u_n \leq v_n \to -\infty$.

- **Suites monotones :** croissante et majorée ⇒ convergente ; décroissante et minorée ⇒ convergente.
- **Composée :** si $u_n \to \ell$ et f continue en ℓ, alors $f(u_n) \to f(\ell)$.
- **Suite récurrente :** si f est continue sur I, $f(I) \subset I$, $u_0 \in I$ et (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors $f(\ell) = \ell$.
- **Suite $u_{n+1} = au_n + b$ $(a \neq 1)$:** on pose $v_n = u_n - \ell$ avec $\ell = a\ell + b$; (v_n) est géométrique de raison a.