Fiche technique

Professeur : Yassine NACHIT	**Matière : Mathématiques**

Limites et continuité

	Durée : 15 heures	***Niveau : 2 BAC PC***
Les capacités attendues	• Étudier la continuité d'une fonction en un point et sur un intervalle. • Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue. • Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires ; encadrer une solution par dichotomie. • Déterminer une fonction réciproque ; calculer avec les racines n-ièmes.	
Contenus du programme	• Continuité en un point, à droite, à gauche et sur un intervalle. • Image d'un intervalle ; théorème des valeurs intermédiaires. • Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone. • Fonction racine n-ième ; puissances rationnelles d'un réel positif.	
Recommandations pédagogiques	• On adopte la définition : f est continue en x_0 si $f(x)$ tend vers $f(x_0)$ quand x tend vers x_0. • On admet la continuité des fonctions usuelles et le fait que l'image d'un segment par une fonction continue est un segment. • On insiste sur le T.V.I. et ses applications (équations, signe, dichotomie).	
Fichiers utilisés dans la préparation du cours	• Les orientations pédagogiques. • Livre de l'élève. • Des sites Internet éducatifs. • Distribution périodique du programme de mathématiques.	
Rôle de l'enseignant	• Écrire l'activité au tableau • Marquer les difficultés • Répartir les tâches • Donner une durée suffisante pour la recherche individuelle • Diagnostiquer les prérequis des apprenants • Noter les observations	
Rôle de l'apprenant	• Écrire les activités • Répondre aux questions de l'activité avec la justification de ses solutions. • Formuler les résultats de l'activité sous forme de théorème ou de propriété. • Répondre aux exercices	

Outils didactiques : Tableau, livre, craie, marqueurs …..

Limites et continuité

I. Rappels et compléments sur les limites

1. Limites usuelles

Rappel

Soit n un entier naturel non nul.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$ si n est pair et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$ si n est impair.
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.
- $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to0^-} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.
- En $+\infty$ et en $-\infty$, la limite d'une fonction **polynôme** est celle de son terme de plus haut degré ; la limite d'une fonction **rationnelle** est celle du quotient des termes de plus haut degré.

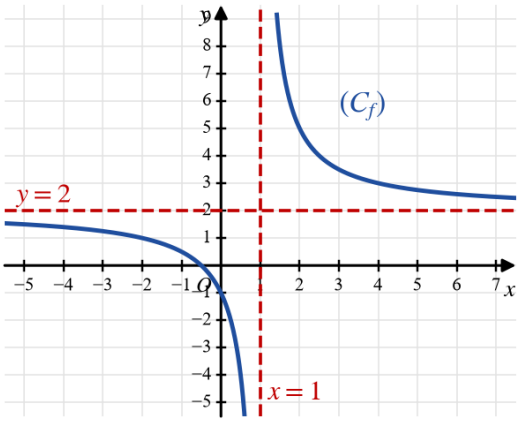
Limites trigonométriques usuelles :

$$\lim_{x\to0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Limites et asymptotes

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty$: la droite d'équation $x = 1$ est une **asymptote verticale** à la courbe (C_f).
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$: la droite d'équation $y = 2$ est une **asymptote horizontale** à (C_f) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.



À retenir : une limite infinie en un réel a se traduit par une asymptote verticale d'équation $x = a$; une limite finie b en $+\infty$ ou en $-\infty$ se traduit par une asymptote horizontale d'équation $y = b$.

2. Opérations sur les limites et formes indéterminées

Les limites d'une somme, d'un produit et d'un quotient se déduisent des limites de chaque terme, sauf dans quatre cas, appelés **formes indéterminées** (F.I.), où l'on ne peut pas conclure directement :

« $+\infty - \infty$ »	« $0 \times \infty$ »	« $\frac{\infty}{\infty}$ »	« $\frac{0}{0}$ »

Méthode : lever une forme indéterminée

- **Fonction rationnelle en un réel** a (forme « $\frac{0}{0}$ ») : on factorise le numérateur et le dénominateur par $(x-a)$, puis on simplifie.
- **Expression avec des racines carrées** : on multiplie le numérateur et le dénominateur par l'**expression conjuguée**.
- **En $+\infty$ ou en $-\infty$** : on met en facteur le terme dominant. Attention : $\sqrt{x^2}=|x|$, donc $\sqrt{x^2}=x$ si $x>0$ et $\sqrt{x^2}=-x$ si $x<0$.
- **Expression trigonométrique en** 0 : on fait apparaître $\frac{\sin u}{u}$, $\frac{\tan u}{u}$ ou $\frac{1-\cos u}{u^2}$, où u tend vers 0.

Exemples

Exemple 1. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)$ (forme « $+\infty-\infty$ »). Pour $x>0$, on multiplie par l'expression conjuguée :

$$\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{(x^2+x+1)-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}$$
$$=\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)}=\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)=\frac{1}{\sqrt{1}+1}=\frac{1}{2}$.

Exemple 2. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-3}$ (forme « $\frac{\infty}{\infty}$ »). Pour $x<0$: $\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)}=|x|\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}=-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$, donc :

$$\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-3}=\frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=\frac{-\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{3}{x}}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2+1}}{x-3}=\frac{-\sqrt{4}}{1}=-2$.

3. Limites et ordre

Propriété

Soient f, u et v des fonctions définies au voisinage de a (a est un réel, $+\infty$ ou $-\infty$) et soit ℓ un réel.

- **Théorème des gendarmes :** si $u(x)\le f(x)\le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}u(x)=\lim\limits_{x\to a}v(x)=\ell$, alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$.
- Si $|f(x)-\ell|\le u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}u(x)=0$, alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\ell$.
- Si $f(x)\ge u(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}u(x)=+\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$.
- Si $f(x)\le v(x)$ et $\lim\limits_{x\to a}v(x)=-\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a}f(x)=-\infty$.

Exemple

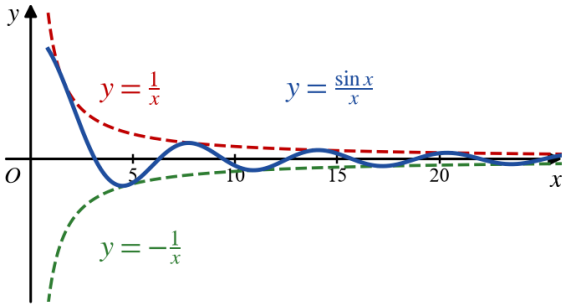
Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Pour tout $x > 0$: $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$. D'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$



Application 1

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-3x}+x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$

Solution

- **1)** Forme « $\frac{0}{0}$ ». On multiplie par l'expression conjuguée. Pour $x \geq -5$ et $x \neq 4$:

$$\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \frac{(x+5)-9}{(x-4)\left(\sqrt{x+5}+3\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+5}+3}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$.

- **2)** Forme « $+\infty - \infty$ ». Pour $x < 0$: $\sqrt{x^2-3x} = |x|\sqrt{1-\frac{3}{x}} = -x\sqrt{1-\frac{3}{x}}$, donc :

$$\sqrt{x^2-3x}+x = \frac{(x^2-3x)-x^2}{\sqrt{x^2-3x}-x} = \frac{-3x}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}-x}$$

$$= \frac{-3x}{-x\left(\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1\right)} = \frac{3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2-3x}+x\right) = \frac{3}{1+1} = \frac{3}{2}$.

- **3)** Forme « $\frac{0}{0}$ ». Pour $x > -1$ et $x \neq 0$, on multiplie par l'expression conjuguée de $\sqrt{x+1}-1$:

$$\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\sin 4x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{(x+1)-1} = 4 \times \frac{\sin 4x}{4x} \times \left(\sqrt{x+1}+1\right)$$

Or $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 4x}{4x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0} \left(\sqrt{x+1}+1\right) = 2$, donc : $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1} = 4 \times 1 \times 2 = 8$.

II. Continuité d'une fonction en un point

1. Continuité en un point

Activité 1

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = 3 \end{cases}$$

et la fonction g définie par la même expression pour $x \neq 2$, mais avec $g(2) = 1$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

2) Comparer $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ et $f(2)$, puis $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$ et $g(2)$.

3) Laquelle des deux courbes peut-on tracer « sans lever le crayon » au voisinage du point d'abscisse 2 ?

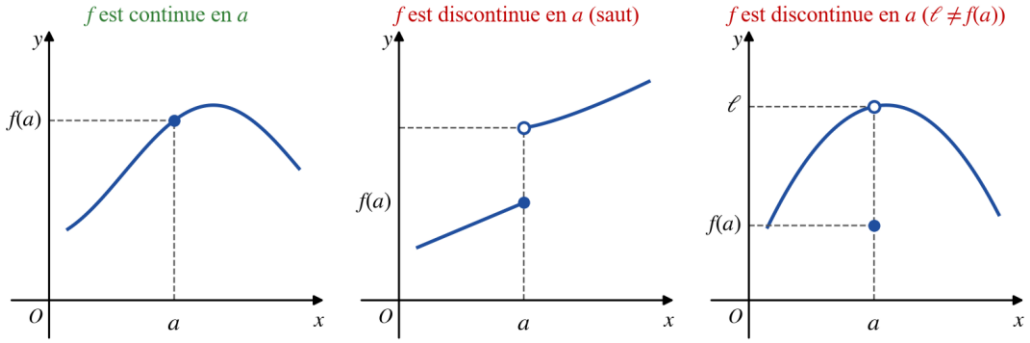
Réponse. Pour $x \neq 2$: $\frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x + 1$, donc les deux limites valent 3. On a $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 3 = f(2)$: on dit que f est **continue en** 2. En revanche $\lim\limits_{x\to 2} g(x) = 3 \neq g(2)$: la courbe de g présente un « trou » au point d'abscisse 2, g n'est pas continue en 2.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et soit a un élément de I.
On dit que f est **continue en** a si f admet en a une limite finie égale à $f(a)$:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Interprétation graphique



Lorsque f est continue en a, sa courbe ne présente aucune « coupure » au point d'abscisse a. Dans le cas contraire (limite différente de $f(a)$, infinie ou inexistante), on dit que f est **discontinue** en a.

Exemples

Exemple 1. Soit g définie sur $[-1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = \frac{1}{2}$. Pour $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = g(0)$: g est continue en 0.

Exemple 2. Soit h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 1$. On a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = \lim\limits_{x\to 0}\left(2 \times \frac{\sin 2x}{2x}\right) = 2$ et $h(0) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} h(x) \neq h(0)$, la fonction h est discontinue en 0.

Application 2

Étudier la continuité de chacune des fonctions suivantes au point indiqué :

1) $g(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 1$; au point $a = 0$.

2) $h(x) = \frac{x\sqrt{x}-8}{x-4}$ si $x \in [0; +\infty[\setminus \{4\}$ et $h(4) = 3$; au point $a = 4$.

Solution

- **1)** $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$ et $g(0) = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq g(0)$, la fonction g n'est pas continue en 0.
- **2)** On pose $t = \sqrt{x}$: $x\sqrt{x} - 8 = t^3 - 2^3 = (t-2)(t^2+2t+4)$ et $x - 4 = t^2 - 4 = (t-2)(t+2)$. Pour $x \geq 0$ et $x \neq 4$:

$$h(x) = \frac{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} = \frac{x+2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 4} h(x) = \frac{4+4+4}{2+2} = 3 = h(4)$: la fonction h est continue en 4.

2. Continuité à droite – continuité à gauche

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a; a+r[$ avec $r > 0$. On dit que f est **continue à droite en** a si : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a-r; a]$ avec $r > 0$. On dit que f est **continue à gauche en** a si : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

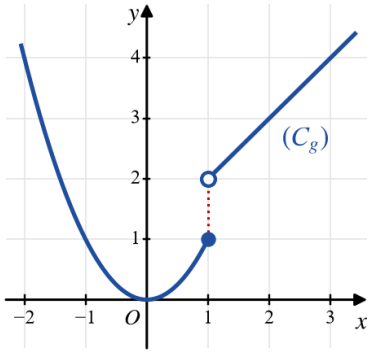
Propriété

Une fonction f est continue en a si et seulement si elle est continue à droite et à gauche en a :

$$f \text{ est continue en } a \Leftrightarrow \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

Exemple 1 : une fonction définie par morceaux

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2$ si $x \leq 1$ et $g(x) = x + 1$ si $x > 1$.

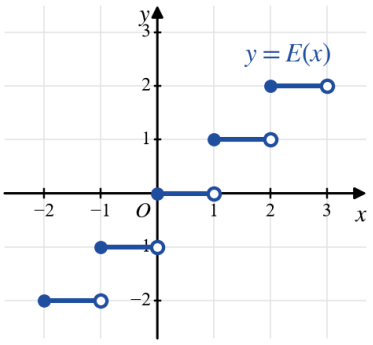


- $g(1) = 1^2 = 1$.
- $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2 = 1 = g(1)$: g est continue à gauche en 1.
- $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = 2 \neq g(1)$: g n'est pas continue à droite en 1.

Donc g n'est pas continue en 1 : sa courbe présente un « saut » au point d'abscisse 1.

Exemple 2* : *la fonction partie entière

La fonction **partie entière**, notée E, associe à tout réel x l'unique entier relatif n tel que $n \leq x < n+1$. Par exemple : $E(2{,}7) = 2$; $E(3) = 3$; $E(-1{,}5) = -2$.



- Pour $x \in [2;3[$: $E(x) = 2$, donc $\lim\limits_{x\to 2^+} E(x) = 2 = E(2)$: E est continue à droite en 2.
- Pour $x \in [1;2[$: $E(x) = 1$, donc $\lim\limits_{x\to 2^-} E(x) = 1 \neq E(2)$: E n'est pas continue à gauche en 2.

Donc E est discontinue en 2 et, de la même façon, en tout entier relatif.

Application 3

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x+1$ si $x < 1$ et $f(x) = x^2 + 2$ si $x \geq 1$. Étudier la continuité de f en 1.

2) Soit m un réel et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^2 + m$ si $x \leq 1$ et $g(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ si $x > 1$. Déterminer la valeur de m pour laquelle g est continue en 1.

Solution

- **1)** On a $f(1) = 1^2 + 2 = 3$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (2x+1) = 3$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (x^2+2) = 3$. Comme $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$, la fonction f est continue en 1.
- **2)** On a $g(1) = 1 + m$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} (x^2+m) = 1+m$: g est continue à gauche en 1. Pour $x > 1$:

$$g(x) = \frac{(x+3)-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+2}$$

Donc $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$. Ainsi : g est continue en $1 \Leftrightarrow 1 + m = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = -\frac{3}{4}$.

III. Continuité sur un intervalle

1. Définitions

Définition

- f est **continue sur l'intervalle ouvert** $]a;b[$ si f est continue en tout point de $]a;b[$.
- f est **continue sur le segment** $[a;b]$ si f est continue sur $]a;b[$, continue à droite en a et continue à gauche en b.
- On définit de la même façon la continuité sur $[a;b[$, sur $]a;b]$, sur $[a;+\infty[$, sur $]-\infty;b]$…

Remarque

- Graphiquement, f est continue sur un intervalle I lorsque la partie de sa courbe correspondant à I se trace « sans lever le crayon ».
- La fonction partie entière est continue sur $[0;1[$ (elle y est constante), mais elle n'est pas continue sur $[0;1]$, car elle n'est pas continue à gauche en 1.

2. Continuité des fonctions usuelles

Propriété

On admet les résultats suivants :

- Toute fonction **polynôme** est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toute fonction **rationnelle** est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$; la fonction $x \mapsto \tan x$ est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.
- La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$; la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Opérations sur les fonctions continues

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et k un réel.

- Les fonctions $f + g$, $k\,f$ et $f \times g$ sont continues sur I.
- Si g ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur I.
- La fonction $|f|$ est continue sur I ; si f est positive sur I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.

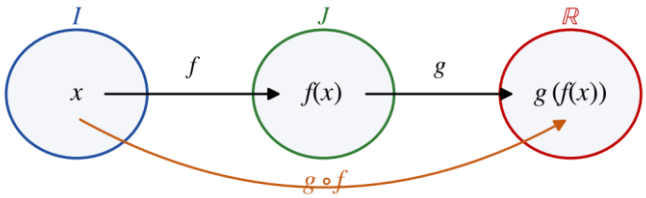
Exemples

- La fonction $f: x \mapsto x^3 - 2x + \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$, comme somme d'une fonction polynôme et de la fonction cosinus, toutes deux continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $h: x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$: la fonction $x \mapsto x^2 - 4$ est continue sur $\mathbb{R}$ et positive sur $]-\infty; -2]$ et sur $[2; +\infty[$, donc h est continue sur chacun de ces deux intervalles.

4. Continuité et limite de la composée de deux fonctions

Propriété

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J tels que $f(I) \subset J$ (c'est-à-dire : pour tout x de I, $f(x) \in J$).
Alors la fonction composée $g \circ f: x \mapsto g(f(x))$ est continue sur I.



Exemples

- $x \mapsto \cos(2x + 1)$ est continue sur $\mathbb{R}$: c'est la composée de $x \mapsto 2x + 1$ (continue sur $\mathbb{R}$) et de la fonction cosinus (continue sur $\mathbb{R}$).
- $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$: le trinôme $x^2 + x + 1$ a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, donc il est strictement positif sur $\mathbb{R}$, et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$.

Propriété (limite d'une fonction composée)

Soient a un réel, $+\infty$ ou $-\infty$, et ℓ un réel. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et si g est continue en ℓ, alors :

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(\ell)$$

Exemples

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\pi x+1}{3x-2} = \frac{\pi}{3}$ et la fonction cosinus est continue en $\frac{\pi}{3}$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\frac{\pi x+1}{3x-2}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.
- $\lim\limits_{x\to0} \frac{\pi \sin x}{6x} = \frac{\pi}{6}$ et la fonction sinus est continue en $\frac{\pi}{6}$, donc $\lim\limits_{x\to0} \sin\left(\frac{\pi \sin x}{6x}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Application 4

1) Montrer que la fonction $f: x \mapsto \frac{x+\sqrt{x-1}}{x^2+1}$ est continue sur $[1; +\infty[$.

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x < 0$ et $g(x) = x^2 + 1$ si $x \geq 0$.
Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$.

3) Calculer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\frac{9x^2+1}{x^2+2}}$

b) $\lim\limits_{x\to0} \cos\left(\frac{\pi(1-\cos x)}{x^2}\right)$

Solution

- **1)** La fonction $x \mapsto x - 1$ est continue et positive sur $[1; +\infty[$, donc $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est continue sur $[1; +\infty[$. Le numérateur $x \mapsto x + \sqrt{x-1}$ est alors continu sur $[1; +\infty[$ (somme de fonctions continues). Le dénominateur $x \mapsto x^2 + 1$ est continu et ne s'annule pas. Donc f est continue sur $[1; +\infty[$ comme quotient de fonctions continues.
- **2)** Sur $]-\infty; 0[$: g est le quotient de la fonction sinus par la fonction $x \mapsto x$, continues, et le dénominateur ne s'annule pas ; donc g est continue sur $]-\infty; 0[$. Sur $]0; +\infty[$: g est une fonction polynôme, donc continue. En 0 : $g(0) = 1$, $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = \lim\limits_{x\to0^+} (x^2 + 1) = 1$, donc g est continue en 0. Conclusion : g est continue sur $\mathbb{R}$.
- **3) a)** $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{9x^2+1}{x^2+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{9x^2}{x^2} = 9$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en 9, donc la limite cherchée vaut $\sqrt{9} = 3$.
- **b)** $\lim\limits_{x\to0} \frac{\pi(1-\cos x)}{x^2} = \pi \times \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$ et la fonction cosinus est continue en $\frac{\pi}{2}$, donc la limite cherchée vaut $\cos\frac{\pi}{2} = 0$.

IV. Image d'un intervalle par une fonction continue

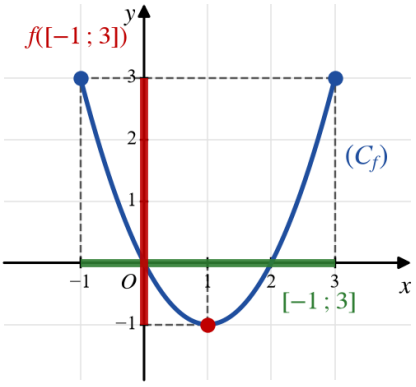
1. Image d'un segment – image d'un intervalle

Activité 2

La figure ci-contre représente la courbe de la fonction $f: x \mapsto x^2 - 2x$ sur le segment $[-1; 3]$.

On appelle **image** d'un intervalle I par f, et on note $f(I)$, l'ensemble des valeurs $f(x)$ lorsque x décrit I.

1) Déterminer graphiquement la plus petite valeur m et la plus grande valeur M prises par f sur $[-1; 3]$.
2) En déduire $f([-1; 3])$.
3) Déterminer graphiquement $f([0; 2])$ et $f(]1; 3[)$.



Réponse. On lit $m = f(1) = -1$ et $M = f(-1) = f(3) = 3$; toutes les valeurs comprises entre -1 et 3 sont atteintes, donc $f([-1; 3]) = [-1; 3]$. De même : $f([0; 2]) = [-1; 0]$ et $f(]1; 3[) =]-1; 3[$.

Propriété

On admet les résultats suivants :

- L'image d'un **segment** $[a; b]$ par une fonction continue est un **segment** $[m; M]$, où m est la valeur minimale et M la valeur maximale de f sur $[a; b]$.
- L'image d'un **intervalle** par une fonction continue est un **intervalle**.

Remarque

L'hypothèse de continuité est indispensable : l'image du segment $[0; 2]$ par la fonction partie entière est l'ensemble $\{0; 1; 2\}$, qui n'est pas un intervalle. Par ailleurs, l'image d'un intervalle ouvert n'est pas toujours un intervalle ouvert : pour $f: x \mapsto x^2$, $f(]-1; 2[) = [0; 4[$.

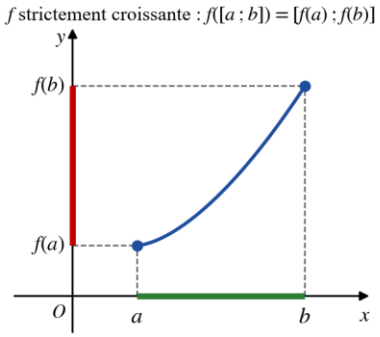
2. Cas d'une fonction continue et strictement monotone

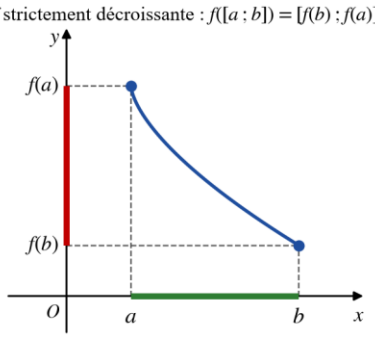
Propriété

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I. L'intervalle $f(I)$ est donné par le tableau suivant :

L'intervalle I	f strictement croissante sur I	f strictement décroissante sur I
$[a; b]$	$f(I) = [f(a); f(b)]$	$f(I) = [f(b); f(a)]$
$[a; b[$	$f(I) = \left[f(a); \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x); f(a)\right]$
$]a; b]$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x); f(b)\right]$	$f(I) = \left[f(b); \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$]a; b[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x); \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x); \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$
$[a; +\infty[$	$f(I) = \left[f(a); \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x); f(a)\right]$
$]-\infty; b]$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x \to -\infty} f(x); f(b)\right]$	$f(I) = \left[f(b); \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)\right[$

On procède de même pour $]a; +\infty[$, $]-\infty; b[$ et $\mathbb{R}$: chaque borne ouverte de I donne une limite et une borne ouverte de $f(I)$.





Méthode : déterminer l'image d'un intervalle

1) On justifie que f est continue sur I.
2) On étudie les variations de f sur I (signe de la dérivée f').
3) Si f est strictement monotone sur I, on calcule les valeurs ou les limites de f aux bornes de I et on applique le tableau précédent.
4) Si f change de sens de variation sur I, on découpe I en intervalles sur lesquels f est strictement monotone, puis on réunit les images obtenues.

Exemples

Exemple 1. Soit f la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$.

f est une fonction rationnelle, donc elle est continue sur $]-1;+\infty[$. De plus, pour tout $x>-1$:

$$f'(x)=\frac{2(x+1)-(2x-1)}{(x+1)^2}=\frac{3}{(x+1)^2}>0$$

Donc f est strictement croissante sur $]-1;+\infty[$. On en déduit :

- $f([0;2])=[f(0);f(2)]=[-1;1]$.
- $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$ (car $\lim\limits_{x\to-1^+}(2x-1)=-3$ et $\lim\limits_{x\to-1^+}(x+1)=0^+$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$, donc $f(]-1;+\infty[)=]-\infty;2[$.

Exemple 2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3-3x$. C'est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$, et $g'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	-2	↗	$+\infty$

- g est continue et strictement décroissante sur $[-1;1]$: $g([-1;1])=[g(1);g(-1)]=[-2;2]$.
- g est continue et strictement croissante sur $[1;+\infty[$: $g([1;+\infty[)=\left[g(1);\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right[=[-2;+\infty[$.
- Sur $[-2;3]$, g n'est pas monotone. On découpe : $g([-2;-1])=[-2;2]$, $g([-1;1])=[-2;2]$ et $g([1;3])=[-2;18]$. Donc $g([-2;3])=[-2;18]$.

Application 5

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

1) Justifier que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2) Calculer $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$.
3) Déterminer $f([0;1])$, $f([1;+\infty[)$ puis $f([0;+\infty[)$.

Solution

- **1)** f est une fonction rationnelle dont le dénominateur x^2+1 ne s'annule jamais : elle est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0;+\infty[$.
- **2)** Pour tout $x \geq 0$:

$$f'(x) = \frac{1\times(x^2+1)-x\times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$$

Sur $[0;+\infty[$, $f'(x)$ a le signe de $1-x$. De plus $f(0)=0$, $f(1)=\frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

- **3)** f est continue et strictement croissante sur $[0;1]$, puis continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$, donc :

$$f([0;1]) = [f(0);f(1)] = \left[0;\frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad f([1;+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} f(x);f(1)\right] = \left]0;\frac{1}{2}\right]$$

Par réunion : $f([0;+\infty[) = \left[0;\frac{1}{2}\right] \cup \left]0;\frac{1}{2}\right] = \left[0;\frac{1}{2}\right]$.

V. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Énoncé du théorème

Activité 3

Soit f la fonction définie sur $[0;2]$ par $f(x)=x^3+x$.

1) Calculer $f(0)$ et $f(2)$.

2) Justifier que f est continue et strictement croissante sur $[0;2]$, puis déterminer $f([0;2])$.

3) En déduire que l'équation $x^3+x=5$ admet au moins une solution dans $[0;2]$.

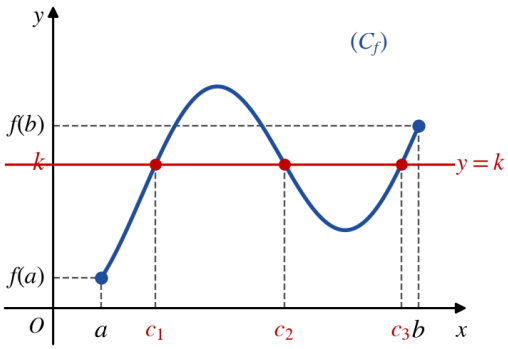
Réponse. $f(0)=0$ et $f(2)=10$. f est une fonction polynôme, donc continue, et $f'(x)=3x^2+1>0$: f est strictement croissante sur $[0;2]$, d'où $f([0;2])=[0;10]$. Comme $5\in[0;10]$, il existe un réel c de $[0;2]$ tel que $f(c)=5$.

Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.)

Soit f une fonction **continue** sur un segment $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c de $[a;b]$ tel que :

$$f(c)=k$$

Autrement dit : l'équation $f(x)=k$ admet **au moins une solution** dans $[a;b]$.



Ici, l'équation $f(x) = k$ admet trois solutions c_1, c_2 et c_3 dans $[a; b]$.

Remarque

- Le théorème affirme l'**existence** d'au moins une solution, mais il ne donne ni le nombre de solutions ni leurs valeurs.
- La continuité est indispensable : pour la fonction partie entière, $E(0) = 0$ et $E(1) = 1$, mais l'équation $E(x) = \frac{1}{2}$ n'a aucune solution dans $[0; 1]$.

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un segment $[a; b]$. Si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle ouvert $]a; b[$.

Exemple

Montrons que l'équation $\cos x = x$ admet au moins une solution dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

On pose $g(x) = \cos x - x$. La fonction g est continue sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ (différence de deux fonctions continues). De plus $g(0) = 1 > 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$, donc $g(0) \times g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$.

D'après le T.V.I., l'équation $g(x) = 0$, c'est-à-dire $\cos x = x$, admet au moins une solution dans $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

2. *Cas d'une fonction continue et strictement monotone*

Propriété

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un segment $[a; b]$.

- Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **solution unique** dans $[a; b]$.
- En particulier, si $f(a) \times f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]a; b[$.

Plus généralement, si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors pour tout réel k de l'intervalle $f(I)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans I.

Méthode : rédaction type « examen national »

Pour montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une **solution unique** α dans $]a; b[$, on vérifie **trois points** :

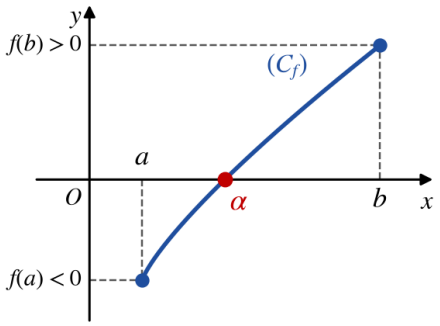
1) f est **continue** sur $[a; b]$;
2) f est **strictement monotone** sur $[a; b]$;
3) $f(a) \times f(b) < 0$.

On conclut en citant le théorème des valeurs intermédiaires. On en déduit aussi le **signe** de $f(x)$: si f est croissante, $f(x) < 0$ sur $[a; \alpha[$ et $f(x) > 0$ sur $]\alpha; b]$; si f est décroissante, c'est le contraire.

Exemple

Montrons que l'équation $x^3 + x - 3 = 0$ admet une solution unique α dans $]1; 2[$. On pose $f(x) = x^3 + x - 3$.

- f est une fonction polynôme, donc f est continue sur $[1; 2]$.
- Pour tout x de $[1; 2]$: $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante sur $[1; 2]$.
- $f(1) = -1$ et $f(2) = 7$, donc $f(1) \times f(2) < 0$.



D'après le T.V.I., l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $]1; 2[$.

Signe de $f(x)$: comme f est strictement croissante et $f(\alpha) = 0$, on a $f(x) < 0$ pour $x \in [1; \alpha[$ et $f(x) > 0$ pour $x \in]\alpha; 2]$.

3. *Encadrement d'une solution : la méthode de dichotomie*

Le T.V.I. assure l'existence de la solution α, mais il ne donne pas sa valeur. La **dichotomie** (« couper en deux ») permet d'encadrer α avec la précision souhaitée.

Méthode de dichotomie

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$ telle que $f(a) \times f(b) < 0$, et soit α l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $]a; b[$.

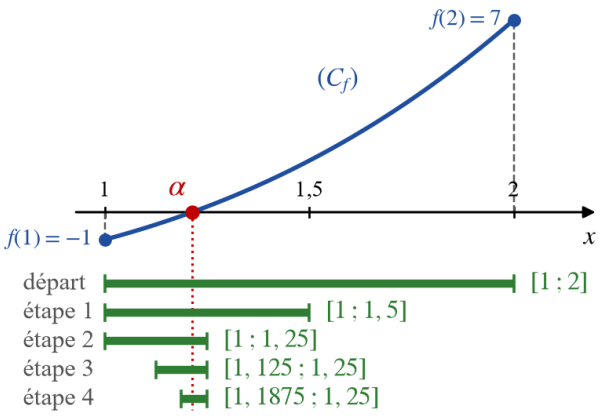
1) On calcule le milieu $c = \frac{a+b}{2}$ de l'intervalle, puis $f(c)$.
2) Si $f(a) \times f(c) < 0$, alors $\alpha \in]a; c[$; sinon, $\alpha \in]c; b[$.
3) On recommence avec le nouvel intervalle, dont la longueur est deux fois plus petite.

Après n étapes, on obtient un encadrement de α d'amplitude $\frac{b-a}{2^n}$.

Exemple

Reprenons la fonction $f : x \mapsto x^3 + x - 3$ et sa solution $\alpha \in]1; 2[$, avec $f(1) < 0$ et $f(2) > 0$ (f est croissante : si $f(c) < 0$ alors $\alpha > c$, et si $f(c) > 0$ alors $\alpha < c$).

Étape	Intervalle $[a; b]$	Milieu c	Valeur de $f(c)$	Conclusion
1	$[1 ; 2]$	1,5	$f(1{,}5) = 1{,}875 > 0$	$\alpha \in]1 ; 1{,}5[$
2	$[1 ; 1{,}5]$	1,25	$f(1{,}25) \approx 0{,}203 > 0$	$\alpha \in]1 ; 1{,}25[$
3	$[1 ; 1{,}25]$	1,125	$f(1{,}125) \approx -0{,}451 < 0$	$\alpha \in]1{,}125 ; 1{,}25[$
4	$[1{,}125 ; 1{,}25]$	1,1875	$f(1{,}1875) \approx -0{,}138 < 0$	$\alpha \in]1{,}1875 ; 1{,}25[$



À chaque étape, l'intervalle qui contient α est coupé en deux.

Ainsi $1{,}1875 < \alpha < 1{,}25$: c'est un encadrement de α d'amplitude $0{,}0625 = \frac{1}{2^4}$. (La calculatrice donne $\alpha \approx 1{,}213$.)

Application 6

Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 + 2x - 2$.

1) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$, et que $0 < \alpha < 1$.
2) Par dichotomie, donner un encadrement de α d'amplitude $0{,}125$.
3) Déterminer le signe de $h(x)$ suivant les valeurs de x.
4) Montrer que $\alpha = \frac{2}{\alpha^2+2}$.

Solution

- **1)** h est une fonction polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x : $h'(x) = 3x^2 + 2 > 0$, donc h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, donc $h(\mathbb{R}) =]-\infty;+\infty[= \mathbb{R}$. Comme $0 \in h(\mathbb{R})$, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$. Enfin $h(0) = -2 < 0$ et $h(1) = 1 > 0$, donc $h(0) \times h(1) < 0$ et $0 < \alpha < 1$.
- **2)** $h(0{,}5) = -0{,}875 < 0$, donc $\alpha \in]0{,}5\,;1[$; $h(0{,}75) \approx -0{,}078 < 0$, donc $\alpha \in]0{,}75\,;1[$; $h(0{,}875) \approx 0{,}42 > 0$, donc $\alpha \in]0{,}75\,;0{,}875[$. Ainsi $0{,}75 < \alpha < 0{,}875$ (amplitude $0{,}125$).
- **3)** h est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $h(\alpha) = 0$, donc : $h(x) < 0$ si $x < \alpha$; $h(x) = 0$ si $x = \alpha$; $h(x) > 0$ si $x > \alpha$.
- **4)** $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + 2\alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha(\alpha^2 + 2) = 2 \Leftrightarrow \alpha = \frac{2}{\alpha^2+2}$ (car $\alpha^2 + 2 \neq 0$).

VI. Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

1. Existence de la fonction réciproque

Activité 4

1) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - 3$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$, où y est un réel donné. Combien de solutions obtient-on ?
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$. Résoudre l'équation $g(x) = 4$ dans $\mathbb{R}$, puis dans $[0;+\infty[$. Que remarque-t-on ?

Réponse. $2x - 3 = y \Leftrightarrow x = \frac{y+3}{2}$: tout réel y possède un antécédent unique par f. En revanche, l'équation $x^2 = 4$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$ (-2 et 2), mais une seule dans $[0;+\infty[$: sur cet intervalle, g est strictement croissante.

Théorème et définition

Soit f une fonction **continue** et **strictement monotone** sur un intervalle I, et soit $J = f(I)$.

- Pour tout y de J, l'équation $f(x) = y$ admet une solution unique dans I : on dit que f est une **bijection** de I vers J.
- La fonction qui, à tout y de J, associe cette unique solution s'appelle la **fonction réciproque** de f ; on la note f^{-1}. Elle est définie sur J et :

$$\begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x \in I \end{cases}$$

Conséquences : pour tout x de I, $f^{-1}(f(x)) = x$; pour tout y de J, $f(f^{-1}(y)) = y$. Attention : f^{-1} ne désigne pas $\frac{1}{f}$.

2. *Propriétés de la fonction réciproque*

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit $J = f(I)$.

- f^{-1} est **continue** sur J.
- f^{-1} est **strictement monotone** sur J et elle a le **même sens de variation** que f.
- Dans un repère orthonormé, les courbes (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont **symétriques** par rapport à la droite d'équation $y = x$ (la première bissectrice).

Méthode : déterminer l'expression de la fonction réciproque

1) On montre que f est continue et strictement monotone sur I : f admet donc une fonction réciproque.
2) On détermine l'intervalle $J = f(I)$: c'est l'ensemble de définition de f^{-1}.
3) Pour $y \in J$, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in I$.
4) On conclut en donnant $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

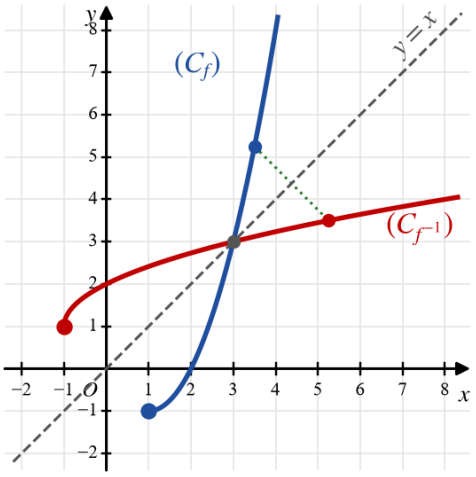
Exemple

Soit f la fonction définie sur $I = [1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 - 2x$.

- f est une fonction polynôme, donc elle est continue sur I ; $f'(x) = 2(x-1) > 0$ pour tout $x > 1$, donc f est strictement croissante sur I. Ainsi f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$.
- $J = \left[f(1); \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[= [-1; +\infty[$.
- Soient $y \in [-1; +\infty[$ et $x \in [1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow x^2 - 2x = y \Leftrightarrow (x-1)^2 = y + 1 \\ &\Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{y+1} \quad (\text{car } x - 1 \geq 0) \\ &\Leftrightarrow x = 1 + \sqrt{y+1} \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in [-1; +\infty[$: $f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{x+1}$.
Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.



Application 7

Soit h la fonction définie sur $I = [-1; +\infty[$ par $h(x) = 2 - \sqrt{x+1}$.

1) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

2) Calculer $h(3)$ et en déduire $h^{-1}(0)$.

3) Préciser le sens de variation de h^{-1} sur J.

4) Déterminer $h^{-1}(x)$ pour tout x de J.

Solution

- **1)** La fonction $x \mapsto x+1$ est continue et positive sur I, donc $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur I, et h aussi. Pour tout $x > -1$: $h'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x+1}} < 0$, donc h est strictement décroissante sur I. Par suite h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $J = h(I)$. Or $h(-1) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, donc $J =]-\infty; 2]$.
- **2)** $h(3) = 2 - \sqrt{4} = 0$ et $3 \in I$, donc $h^{-1}(0) = 3$.
- **3)** h^{-1} a le même sens de variation que h : elle est strictement décroissante sur $]-\infty; 2]$.
- **4)** Soient $y \in]-\infty; 2]$ et $x \in [-1; +\infty[$:

$$\begin{aligned} h(x) = y &\Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 - y \\ &\Leftrightarrow x + 1 = (2-y)^2 \quad (\text{car } 2 - y \geq 0) \\ &\Leftrightarrow x = (2-y)^2 - 1 \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in]-\infty; 2]$: $h^{-1}(x) = (2-x)^2 - 1 = x^2 - 4x + 3$.

VII. Fonction racine n-ième – puissances rationnelles

1. La fonction racine n-ième

Soit n un entier naturel non nul. La fonction $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$; de plus $0^n = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$. L'image de $[0; +\infty[$ par cette fonction est donc $[0; +\infty[$, et elle admet une fonction réciproque définie sur $[0; +\infty[$.

Définition

Soit n un entier naturel non nul. La fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^n$ définie sur $[0; +\infty[$ s'appelle la **fonction racine n-ième** ; on la note $x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Pour tous réels positifs x et y :

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$$

Cas particuliers : $\sqrt[1]{x} = x$; $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$ (racine carrée) ; $\sqrt[3]{x}$ s'appelle la **racine cubique** de x.

Exemples

- $\sqrt[3]{8} = 2$ car $2^3 = 8$; $\sqrt[3]{125} = 5$ car $5^3 = 125$.
- $\sqrt[4]{81} = 3$ car $3^4 = 81$; $\sqrt[5]{32} = 2$ car $2^5 = 32$.
- $\sqrt[3]{0{,}001} = 0{,}1$ car $(0{,}1)^3 = 0{,}001$; $\sqrt[n]{0} = 0$ et $\sqrt[n]{1} = 1$.

Propriété

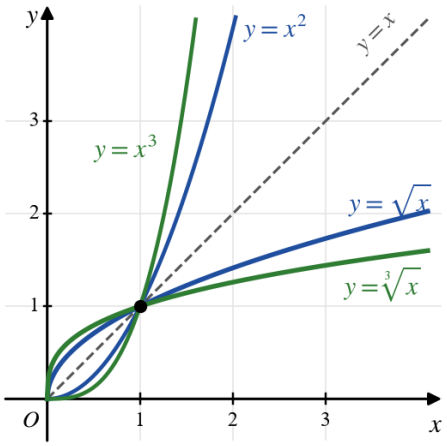
Soit n un entier naturel non nul.

- La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$.
- Pour tout $x \geq 0$: $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$ et $\sqrt[n]{x^n} = x$.
- Pour tous $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$ et $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a < b$.
- Dans un repère orthonormé, la courbe de $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est la symétrique de la courbe de $x \mapsto x^n$ (avec $x \geq 0$) par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Lecture graphique. Les courbes de $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ (en bleu), puis celles de $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ (en vert), sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

- Toutes ces courbes passent par les points $O(0; 0)$ et $A(1; 1)$.
- Sur $[0; 1]$: $x \leq \sqrt{x} \leq \sqrt[3]{x}$; sur $[1; +\infty[$: $\sqrt[3]{x} \leq \sqrt{x} \leq x$.

Attention : dans ce cours, $\sqrt[n]{x}$ n'est défini que pour $x \geq 0$, même lorsque n est impair. On n'écrit donc pas « $\sqrt[3]{-8}$ ».



Propriété (équation $x^n = a$)

Soient n un entier naturel non nul et a un réel. L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^n = a$ est donné par le tableau :

	$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
n pair	$S = \left\{-\sqrt[n]{a}\,; \sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \{0\}$	$S = \emptyset$
n impair	$S = \left\{\sqrt[n]{a}\right\}$	$S = \{0\}$	$S = \left\{-\sqrt[n]{-a}\right\}$

Exemples

- $x^3 = 5 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{5}$.
- $x^4 = 16 \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{16} = 2$ ou $x = -\sqrt[4]{16} = -2$.
- $x^3 = -27 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{27} = -3$.
- L'équation $x^4 = -1$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$; $x^5 = -32 \Leftrightarrow x = -\sqrt[5]{32} = -2$.

2. *Opérations sur les racines n-ièmes*

Propriété

Soient a et b deux réels positifs, n et m deux entiers naturels non nuls.

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad ; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \ (b \neq 0) \quad ; \quad \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} = \sqrt[nm]{a^m}$$

Exemples

- $\sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{8} = 2$; $\frac{\sqrt[4]{48}}{\sqrt[4]{3}} = \sqrt[4]{16} = 2$; $\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[6]{64} = 2$.

- Comparons $\sqrt{2}$ et $\sqrt[3]{3}$: on les écrit avec le même indice 6. On a $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$ et $\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$. Comme $8 < 9$, on obtient $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$.

3. Limites et continuité avec les racines n-ièmes

Propriété

Soient n un entier naturel non nul et u une fonction positive sur un intervalle I.

- Si u est continue sur I, alors la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I.
- Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \ell$ avec $\ell \geq 0$, alors $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{\ell}$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} u(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$.

Méthode : « expression conjuguée » pour les racines cubiques

L'identité remarquable $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ donne, avec $a = \sqrt[3]{u}$ et $b = \sqrt[3]{v}$:

$$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = \frac{u - v}{\sqrt[3]{u^2} + \sqrt[3]{uv} + \sqrt[3]{v^2}}$$

Les racines cubiques ont disparu du numérateur : c'est l'analogue de l'expression conjuguée.

Exemples

Exemple 1. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8x+1}{x+2} = 8$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{8x+1}{x+2}} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Exemple 2. Calculons $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ (forme « $\frac{0}{0}$ »). Pour $x \geq 0$ et $x \neq 1$, avec $u = x$ et $v = 1$:

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x - 1} = \frac{x - 1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$.

Application 8

1) Simplifier : $A = \sqrt[4]{32} \times \sqrt[4]{8}$ et $B = \sqrt[3]{\sqrt{729}}$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x^4 = 81$; $x^3 + 64 = 0$; $\sqrt[3]{2x-1} = 3$.

3) Calculer : $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt[3]{x^3+x^2} - x\right)$.

Solution

- **1)** $A = \sqrt[4]{32 \times 8} = \sqrt[4]{256} = 4$ (car $4^4 = 256$) ; $B = \sqrt[6]{729} = 3$ (car $3^6 = 729$).
- **2)** $x^4 = 81$: 4 est pair et $81 > 0$, donc $x = \sqrt[4]{81} = 3$ ou $x = -3$; $S = \{-3; 3\}$. $x^3 = -64$: 3 est impair et $-64 < 0$, donc $x = -\sqrt[3]{64} = -4$; $S = \{-4\}$. L'équation $\sqrt[3]{2x-1} = 3$ est définie pour $x \geq \frac{1}{2}$; elle équivaut à $2x - 1 = 3^3 = 27$, soit $x = 14$ (et $14 \geq \frac{1}{2}$) ; $S = \{14\}$.
- **3) a)** Avec $u = x$ et $v = 8$ (donc $\sqrt[3]{v} = 2$), pour $x \geq 0$ et $x \neq 8$:

$$\frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8} = \frac{x - 8}{(x-8)\left(\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4\right)} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{x} + 4}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \frac{1}{4+4+4} = \frac{1}{12}$.

- **b)** Pour $x > 0$, on a $\sqrt[3]{x^3+x^2} = x\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}$. Avec $a = \sqrt[3]{x^3+x^2}$ et $b = x$: $a^3 - b^3 = x^2$, donc :

$$\sqrt[3]{x^3+x^2} - x = \frac{x^2}{a^2+ab+b^2} = \frac{x^2}{x^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} + 1\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} + 1}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2} - x\right) = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}$.

4. Puissance rationnelle d'un réel strictement positif

Définition

Soient x un réel strictement positif et $r = \frac{p}{q}$ un nombre rationnel (avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$). On pose :

$$x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$$

En particulier : $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$; par exemple $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ et $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$.

Exemples

- $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$; $16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$.
- $27^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{27}} = \frac{1}{3}$; $4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 8$.

Propriété

Pour tous réels strictement positifs x et y et tous nombres rationnels r et r' :

$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad ; \quad \frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad ; \quad (x^r)^{r'} = x^{rr'} \quad ; \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}$$

$$(xy)^r = x^r\, y^r \quad ; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

Exemple

Simplifions $A = \frac{\sqrt[3]{4}\times\sqrt{8}}{\sqrt[6]{2}}$ en écrivant chaque facteur comme une puissance de 2 :

$$A = \frac{2^{\frac{2}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{4+9-1}{6}} = 2^2 = 4$$

Application 9

Calculer $C = 27^{\frac{2}{3}} \times 9^{-\frac{1}{2}}$, puis résoudre dans $]0;+\infty[$ l'équation $x^{\frac{3}{2}} = 8$.

Solution

- $C = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 \times \frac{1}{\sqrt{9}} = 3^2 \times \frac{1}{3} = 3$.
- Pour $x > 0$: $x^{\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{64} = 4$. Donc $S = \{4\}$.

VIII. Erreurs fréquentes

Erreur fréquente	Ce qu'il faut faire
Écrire $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$ sans justification pour une fonction définie par morceaux.	Calculer séparément $f(a)$, la limite à gauche et la limite à droite, puis comparer.
Écrire $\sqrt{x^2} = x$ au voisinage de $-\infty$.	$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$: pour $x < 0$, on a $\sqrt{x^2} = -x$.
Appliquer le T.V.I. sans citer la continuité, ou affirmer l'unicité sans la stricte monotonie.	Vérifier les trois points : continuité, stricte monotonie, $f(a) \times f(b) < 0$.
Écrire $f([a;b]) = [f(a); f(b)]$ pour une fonction qui n'est pas monotone.	Dresser le tableau de variations : $f([a;b]) = [m;M]$ (minimum et maximum).
Confondre f^{-1} et $\frac{1}{f}$.	$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$: on résout l'équation $f(x) = y$ dans I.
Écrire $\sqrt[3]{a+b} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, ou écrire « $\sqrt[3]{-8}$ ».	Seuls les produits et les quotients se séparent ; pour $x^3 = -8$: $x = -\sqrt[3]{8} = -2$.

IX. À retenir

- **Continuité en a :** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$. De plus, f est continue en a si et seulement si $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.
- **Fonctions continues :** les fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques et racine n-ième sont continues sur les intervalles de leur ensemble de définition, ainsi que leurs sommes, produits, quotients et composées. Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ et si g est continue en ℓ, alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = g(\ell)$.
- **Image d'un intervalle :** l'image d'un segment par une fonction continue est un segment ; si f est continue et strictement monotone sur I, les bornes de $f(I)$ sont les valeurs ou les limites de f aux bornes de I.

- **T.V.I. :** si f est continue sur $[a;b]$ et $f(a) \times f(b) < 0$, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a;b[$; si de plus f est strictement monotone, cette solution est unique.
- **Fonction réciproque :** si f est continue et strictement monotone sur I, elle admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $J = f(I)$, continue, de même sens de variation, et $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$. Les courbes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- **Racine n-ième :** pour $x \geq 0$ et $y \geq 0$, $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x$; pour $x > 0$, $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}$; on utilise $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ pour lever les formes indéterminées avec des racines cubiques.